



Primeiro dia

USFQ — Universidad San Francisco de Quito, Ecuador

17 de novembro de 2017

Problema 1. Determine todos os números complexos $w = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tais que existe um polinômio $p(z)$ com coeficientes reais positivos que satisfaz $p(w) = 0$.

Problema 2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(0) = 0$ e $|f'(x)| \leq |f(x) \cdot \log |f(x)||$ para cada $x \in \mathbb{R}$ que satisfaz $0 < |f(x)| < 1/2$. Prove que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 3. Sejam G um grupo abeliano finito e $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow G$ uma função completamente multiplicativa (ou seja, $f(mn) = f(m)f(n)$ para quaisquer inteiros positivos m, n). Prove que existem infinitos inteiros positivos k tais que $f(k) = f(k + 1)$.

Cada problema vale 10 pontos.

Tempo máximo: 4h 30m.