IX Competencia IBEROAMERICANA Interuniversitaria de Matemáticas
Ecuador - 2017

Primer día

USFQ — Universidad San Francisco de Quito, Ecuador

17 de noviembre de 2017

Problema 1. Determine todos los números complejos $w = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$, tales que existe un polinomio $p(z)$ con coeficientes reales y positivos que cumple $p(w) = 0$.

propuesto por *Gugu , IMPA*

Solución. Claramente w no puede ser un real positivo o nulo, caso contrario, como $p(z)$ tiene coeficientes estrictamente positivos, tendríamos $p(w) > 0$. Vamos a probar que en cualquier otro caso existe un tal polinomio $p(z)$.

Suponga inicialmente que $w = a + bi$ tiene parte real $a < 0$. En este caso, w es raíz del polinomio cuadrático $p(z) = z^2 - 2az + (a^2 + b^2)$, que tiene coeficientes estrictamente positivos.

En los casos restantes, tenemos $w = a+bi$ con $a \geq 0$ y $b \neq 0$. Podemos entonces escribir $w = r \cdot e^{i\theta}$, con $r > 0$ y $0 < |\theta| \leq \pi/2$. Sea k el menor entero positivo tal que $k|\theta| > \pi/2$. Tenemos entonces $\pi/2 < k|\theta| \leq \pi/2 + \pi/2 = \pi$, y por lo tanto la parte real c de $w^k = r^k \cdot e^{ik\theta} = c + di$ es estrictamente negativa. Entonces w es raíz del polinomio $z^{2k} - 2cz^k + (c^2 + d^2)$, y luego también del polinomio $(z^{k-1} + z^{k-2} + \cdots + z + 1)(z^{2k} - 2cz^k + (c^2 + d^2))$, que tiene todos los coeficientes estrictamente positivos.

Así, el conjunto de los números complejos con la propiedad del enunciado es $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.

Problema 2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f(0) = 0$ y $|f'(x)| \leq |f(x) \cdot \log|f(x)||$ para cada $x \in \mathbb{R}$ que cumple $0 < |f(x)| < 1/2$. Demuestre que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

propuesto por *Gugu , IMPA*

Solución 1. Suponga por contradicción que no sea así. Entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) \neq 0$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $c > 0$. Sea $d \geq 0$ el mayor número real tal que $f(x) = 0, \forall x \in [0, d]$ (que existe pues f es derivable, luego continua; note que $d < c$). Sea k_0 un entero positivo tal que $|f(c)| \geq e^{-k_0}$. Para cada entero $k \geq k_0$, sea x_k el menor número real en el intervalo $[d, c]$ tal que $|f(x_k)| = e^{-k}$. Note que $d < x_{k+1} < x_k \leq c$ para todo $k \geq k_0$. Así, $|f(x)| \leq e^{-k}$ para $x_{k+1} \leq x \leq x_k$, y luego, por hipótesis, $|f'(x)| \leq |f(x) \cdot \log|f(x)|| \leq k \cdot e^{-k}$ para $x_{k+1} \leq x \leq x_k$ (pues $x \cdot \log x$ es creciente en $[0, e^{-1}]$). Como $(e-1) \cdot e^{-(k+1)} = e^{-k} - e^{-(k+1)} \leq |f(x_k) - f(x_{k+1})| = |f'(c)|(x_k - x_{k+1})$ para algún $c \in (x_{k+1}, x_k)$, tenemos

$$x_k - x_{k+1} \geq \frac{(e-1) \cdot e^{-(k+1)}}{|f'(c)|} \geq \frac{(e-1) \cdot e^{-(k+1)}}{k \cdot e^{-k}} = \frac{e-1}{ek} \geq \frac{1}{2k}$$

y por lo tanto

$$c \geq x_{k_0} \geq d + \sum_{k=k_0}^{\infty} (x_k - x_{k+1}) \geq d + \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{2k} = +\infty,$$

absurdo.

Solución 2. The key observation to the solution is the identity

$$\frac{f'}{f \cdot |\log|f||} = \pm\Big(\log|\log|f||\Big)'.$$

Suppose that $f(a) \neq 0$ for some real a. By replacing $f(x)$ by $\pm f(\pm x)$ we can achieve $a > 0$ and $f(a) > 0$. Let b the maximal element in the interval $[0, a]$ such that $f(b) = 0$, and let c be the minimal number in $[b,a]$ such that $f(c)=\text{mín}(f(a),\frac{1}{e})$. So, we have $f(b)=0$, $0<f(c)\le\frac{1}{e}$ and $0<f(x)<f(b)\le\frac{1}{e}$ for every $x\in(b,c)$. Notice that this implies $\log f(x)<-1$ and $\log\big|\log f(x)\big|>0$.

In the interval (b,c) we have

$$\left|\Big(\log\big|\log f(x)\big|\Big)'\right|=\frac{\big|f'(x)\big|}{\big|f(x)\cdot\log f(x)\big|}\le 1.$$

This implies

$$\left|\log\big|\log f(x)\big|-\log\big|\log f(c)\big|\right|\le|x-c|;$$

therefore

$$\begin{gathered}\log\big|\log f(x)\big|\le\log\big|\log f(c)\big|+|x-c|<\log\big|\log f(c)\big|+(c-b)\\ \big|\log f(x)\big|<\big|\log f(c)\big|\cdot e^{c-b}\\ \log f(x)>\log f(c)\cdot e^{c-b}\\ f(x)>f(c)^{e^{c-b}}.\end{gathered}$$

By taking $x\to b+0$ this contradicts the continuity of f at point b, since $f(b)=0$.

Solución 3. Seja $A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\neq 0 \text{ e } 0<|f(X)|<\frac{1}{2}\right\}$. É claro que A é aberto e que se existe $\tilde{a}\in\mathbb{R}$ tal que $f(\tilde{a})\neq 0$, temos que A é não vazio.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $A\cap(0,+\infty)\neq\varnothing$ e seja $a=\text{ínf}\,A\cap\varnothing$. Como $A\cap(0,+\infty)$ é aberto, $f(a)=0$ e $\forall 0<\epsilon<\tilde{\epsilon}$ suf. pequeño $f(a+\epsilon)\neq 0$.

Defina $g(x)=\log|(f(x)|$, que possui derivada $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$. Logo $|g'(x)|\le g(x)\ \forall x\in(a,a+\epsilon)$. Como $|f(x)|<\frac{1}{2}$, $g(x)<0\ \forall x\in(a,a+\tilde{\epsilon})$ e então $g(x)\le g'(x)\le -g(x)$. Como $g'(x)+g(x)\le 0$, temos $e^xg'(x)+e^xg(x)\le 0 \iff (e^xg(x))'\le 0$. Logo $e^xg(x)$ é decrescente em $(a,a+\tilde{\epsilon})$. Tome $b\in(a,a+\tilde{\epsilon})$ e $a+\epsilon\in(a,a+\tilde{\epsilon})$ con $a+\epsilon<b$. Logo $a^{a+\epsilon}g(a+\epsilon)\ge e^bg(b)$. Fazendo $\epsilon\to 0$, por continuidade de g e como $f(a)=0$, $a^{e+\epsilon}g(a+\epsilon)\to-\infty$, o que é absurdo, pois $e^bg(b)$ é fixo. Logo $f(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Problema 3.

Sean G un grupo abeliano finito y $f:\mathbb{Z}^+\to G$ una función completamente multiplicativa (es decir $f(mn)=f(m)f(n)$ para cualesquiera enteros positivos m,n). Demuestre que existen infinitos enteros positivos k tales que $f(k)=f(k+1)$.

propuesto por *Daniel Campos , University of Chicago, EE.UU./Costa Rica*

Solución. Para todo entero positivo k vamos a construir por inducción un conjunto $M_k=\{m_i\}\subseteq\mathbb{N}$, de cardinalidad k, tal que la diferencia $d_{ij}:=|m_i-m_j|$ divide a m_i,m_j, para cualesquiera $1\le i<j\le k$. Si definimos D_k como el mínimo múltiplo común de todas las diferencias d_{ij}, entonces para todo natural n el conjunto $M_k(n):=\{D_kn+m_i\}$ satisface la misma propiedad de M_k. Además

$$\frac{D_kn+m_i}{d_{ij}}=\frac{D_kn+m_j}{d_{ij}}+1.$$

Si $k>|G|$ entonces para todo n deben existir dos índices tales que $f(D_kn+m_i)=f(D_kn+m_j)$, lo cual implica que

$$f\left(\frac{D_kn+m_j}{d_{ij}}\right)=f\left(\frac{D_kn+m_i}{d_{ij}}\right)=f\left(\frac{D_kn+m_j}{d_{ij}}+1\right),$$

con lo que concluiría el problema.

Podemos tomar $M_1=\{0\}$, $M_2=\{0,1\}$ como casos base para la inducción. Si M_k ya fue construido, buscamos n y $d\neq m_i$ tal que

$$M_{k+1}:=M_k(n)\cup\{D_kn+d\},$$

satisfaga la condición de la divisibilidad del problema. Para esto es suficiente hallar n y d tales que

$$d - m_i | D_k n + d,$$

para todo i. Para esto, es suficiente tomar $d(l) = D_k l$, con l tal que $d(l) \neq m_i$, y $N > 0$ tal que

$$n = N \prod_{i=1}^{k} |d(l) - m_i| - l \geq 0,$$

y así concluye la inducción.

Comentario. El problema está motivado por el problema S416 de la revista Mathematical Reflections, que aparece en la cuarta edición del 2017.

Comentario. Una versión más "económica"para construir n es tomar

$$n = N \prod_{i=1}^{k} \frac{|d(l) - m_i|}{(D_k, m_i)} - l \geq 0.$$

El método de la solución permite construir los conjuntos

$$\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{44, 45, 46, 48\}, \ldots$$

mientras que este permite construir

$$\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{8, 9, 10, 12\}, \ldots$$