Segundo día

USFQ — Universidad San Francisco de Quito, Ecuador

18 de noviembre de 2017

Problema 4. Sean m, n enteros positivos y $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ números reales positivos tales que para todo entero positivo k se tiene que

$$\left|(a_1^k + \ldots + a_m^k) - (b_1^k + \ldots + b_n^k)\right| \leq Ck^N,$$

para ciertos C y N fijos. Demuestre que existen $l \leq m, n$ y permutaciones σ de $\{1, \ldots, m\}$ y τ de $\{1, \ldots, n\}$, tales que

1. $a_{\sigma(i)} = b_{\tau(i)}$ para $1 \leq i \leq l$,
2. $a_{\sigma(i)}, b_{\tau(i)} \leq 1$ para $i > l$.

propuesto por *Daniel Campos , University of Chicago, EE.UU./Costa Rica*

Solución. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$a_1 \geq \ldots \geq a_m, \quad b_1 \geq \ldots \geq b_n.$$

Si $a_1 > b_1$, para k suficientemente grande tenemos que

$$\frac{1}{2} \leq \left(1 + \ldots + \left(\frac{a_m}{a_1}\right)^k\right) - \left(\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^k + \ldots + \left(\frac{b_n}{a_1}\right)^k\right) \leq m.$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}\lim_{k \to +\infty} &\left|(a_1^k + \ldots + a_m^k) - (b_1^k + \ldots + b_n^k)\right|^{1/k} \\ &= \lim_{k \to +\infty} a_1 \left|1 + \ldots + \left(\frac{a_m}{a_1}\right)^k - \left(\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^k + \ldots + \left(\frac{b_n}{a_1}\right)^k\right)\right|^{1/k} = a_1.\end{aligned}$$

Puesto que $(Ck^N)^{1/k} \to 1$, concluimos que $a_1 \leq 1$, y por lo tanto $a_i, b_i \leq 1$ para todo i. Análogamente, si $b_1 > a_1$ se concluye que $b_1 \leq 1$ y así $a_i, b_i \leq 1$ para todo i. El caso restante es $a_1 = b_1$. Si $m = 1$ y $n > 1$, entonces se debe tener $b_i \leq 1$ para $i > 1$. En este caso $l = 1$. En general, procedemos por inducción sobre m con base en las observaciones anteriores.

Comentario. Este problema está basado en el resultado que dice que si

$$a_1^k + \ldots + a_m^k = b_1^k + \ldots + b_n^k,$$

entonces existe $l \leq m, n$ y permutaciones σ de $\{1, \ldots, m\}$ y τ de $\{1, \ldots, n\}$, tales que

1. $a_{\sigma(i)} = b_{\tau(i)}$ para $1 \leq i \leq l$,
2. $a_{\sigma(i)}, b_{\tau(i)} = 0$ para $i > l$.

Comentario. El problema se podría formular también de la siguiente forma: Sean m, n enteros positivos y $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ números reales positivos tales que para todo entero positivo k se tiene que

$$\left|(a_1^k + \ldots + a_m^k) - (b_1^k + \ldots + b_n^k)\right| \leq Ck^N,$$

para ciertos C y N fijos. Demostrar que

$$\left|(a_1^k + \ldots + a_m^k) - (b_1^k + \ldots + b_n^k)\right| \leq C,$$

para todo entero positivo k con la misma constante C.

Problema 5.

Sea S un conjunto de enteros. Dado un real positivo r, decimos que S es un conjunto r-*discerniente*, si para cualquier pareja m, n de enteros distintos y mayores a uno que satisfacen $\left|\frac{m-n}{m+n}\right| < r$, existen un $a \in S$ y un $k \geq 1$ tal que a^k divide a m pero no divide a n, o, a^k divide a n pero no divide a m.

1. Demuestre que para cualquier $r > 0$ todos los conjuntos r-discernientes tienen una infinidad de elementos primos.

2. Para cada $r > 0$ determine la mayor cardinalidad posible de $\mathcal{P} \setminus S$ donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de todos los primos y $S \subset \mathcal{P}$ es un conjunto r-discerniente.

propuesto por *Jorge Garza Vargas y Daniel Perales Anaya , Mexico*

Solución. Diremos que un conjunto de enteros discierne a una pareja de enteros n y m, si hay un entero a en el conjunto y un $k \geq 1$ tal que a^k divide a n pero no divide a m,o, a^k divide a m pero no divide a n.

a) Sea S un conjunto r-discerniente. Procediendo por contradicción podemos tomar un entero M mayor al primo más grande en S. Denotemos por p_n al n-ésimo primo. Primero demostraremos que existe un n tal que $p_{n+1} > p_n$ y que cumple que $\frac{p_{n+1}-p_n}{p_n+p_{n+1}} < r$. Notemos que la desigualdad anterior es equivalente a $\frac{1-r}{1+r} < \frac{p_n}{p_{n+1}}$. Sea $s := \frac{1-r}{1+r}$. Nuevamente procediendo por contradicción, tenemos que para todo n tal que $p_n > M$ se cumple que $\frac{p_n}{p_{n+1}} \leq s < 1$. Entonces, si n es el menor entero tal que $p_n > M$, podemos actoar una cola de la suma de los recíprocos de los primos de la siguiente manera

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{p_k} \leq \frac{1}{p_n} \left(\sum_{j=0}^{\infty} s^j \right) = \frac{1}{p_n(1-s)},$$

lo cuál es una contradicción.

Entonces, existe un k tal que p_k y p_{k+1} no están en S y que cumplen que $\frac{p_{k+1}-p_k}{p_k+p_{k+1}} < r$. Por otro lado, la única manera de discernir a p_k de p_{k+1} es teniendo alguno de ellos en el conjunto.

b) Dividamos en dos casos.

- Cuando $r \geq 1$, cualquier pareja de enteros distintos, n y m, satisface la desigualdad $\frac{n-m}{n+m} \leq r$. Supongamos que S es un conjunto r-discerniente de primos, demostraremos que S tiene a todos los primos. Procedamos por contradicción, supongamos que hay un primo $p \notin S$ y sea $q \neq p$ otro número primo. Entonces S no discierne a q de qp, con lo cual hemos alcanzado una contradicción. Por lo tanto, cuando $r \geq 1$, a los conjuntos de primos r-discernientes no les puede faltar ningún primo.

- Cuando $r < 1$ probaremos que a lo más pueden faltar dos primos. Empecemos probando que existe un conjunto r-discerniente al que le falta un primo. Como $r < 1$, $1 - r > 0$ por lo que existe un primo p suficientemente grande cumpliendo $\frac{2}{p} < 1 - r$ o equivalentemente $r < \frac{p-1}{p}$. Sea S el conjunto de todos los primos distintos a p, probaremos que S es r-discerniente. Sean n y m enteros distintos, si en su descomposición canónica estos difieren en el exponente de algún primo distinto de p, entonces S los puede discernir usando el respectivo primo; de lo contrario, $n = p^k x$ y $m = p^l x$ con $k \neq l$, que sin pérdida de generalidad asumiremos que $k > l$. Ahora notemos que

$$\left|\frac{n-m}{n+m}\right| = \frac{p^k - p^l}{p^l + p^k} = \frac{p^{k-l} - 1}{p^{k-l} + 1} \geq \frac{p-1}{p+1} > r,$$

  y por lo tanto no es necesario que el conjunto los discierna. En otras palabras, hemos demostrado que las únicas parejas no discernibles por S son aquellas que no satisfacen la desigualdad y por lo tanto S es r-discernible.

  Ahora supongamos que hay dos primos p y q que no están en S, demostraremos que S no es r-discernible. Es claro, que para todos x y y enteros positivos, S no discierne a p^x de q^y, por lo que será suficiente demostrar que hay un x y un y satisfaciendo $\frac{p^x - q^y}{p^x + q^y} < r$. Para esto notemos que

$$\left|\frac{p^x - q^y}{p^x + q^y}\right| = \left|\frac{e^{x\log p} - e^{y\log q}}{e^{x\log p} + e^{y\log q}}\right| = \left|\frac{e^{x\log p - y\log q} - 1}{e^{x\log p - y\log q} + 1}\right|.$$

  Como $e^{x\log p - y\log q} + 1 > 1$, será suficiente encontrar x y y con $|e^{x\log p - y\log q} - 1| < r$, o equivalentemente $|x\log p - y\log q| < \log(1 + r)$. Demostraremos que $|x\log p - y\log q|$ puede ser tan pequeño como queramos, para esto necesitaremos del siguiente lema.

  Lema. Sea α un número irracional. En el conjunto $\{\alpha k \ : \ k = 1, 2 \ldots\}$ hay números aribitrariamente cercanos a un entero.

  Demostración. Demostraremos que para todo entero positivo n, existe k, con $\{\alpha k\} < \frac{1}{n}$ o $\frac{n-1}{n} < \{\alpha k\}$. Observemos que los números $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{(n+1)\alpha\}$ se encuentran en el intervalo $[0, 1]$. Dividiendo este intervalo en los intervalos $[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \ldots, [\frac{n-1}{n}, 1]$, notamos que por principio de casillas hay un intervalo que contiene a al menos dos de estos números, digamos $\{i\alpha\}$ y $\{j\alpha\}$ con $i > j$, por lo tanto, $\{(i - j)\alpha\}$ está en $[0, \frac{1}{n}]$ o en $[\frac{n-1}{n}]$, como se quería demostrar.

  Ahora notemos que $|x\log p - y\log q| = |\log q| \left|\frac{\log p}{\log q}x - y\right|$. Además, $\log p$ no puede ser racional, pues si $a\log p = b\log q$ con a y b enteros positivos, entonces $p^a = q^b$, lo cual es imposible. Aplicando el lema sabemos que existen enteros x y y que cumplen que $\left|x\frac{\log p}{\log q} - y\right|$ es menor a $\frac{\log(1+r)}{\log q}$, con lo cual se concluye la demostración.

Problema 6. Sea G un grafo simple, conexo y finito. Un cazador y un conejo invisible juegan sobre el grafo G. El conejo está inicialmente en un vértice w_0. En la k-ésima jugada (para $k \geq 0$) el cazador escoge libremente un vértice v_k. Si $v_k = w_k$, el conejo es capturado y el juego acaba. En el caso contrario, el conejo se mueve invisiblemente por una arista de w_k hacia w_{k+1} (w_k y w_{k+1} son adyacentes y por lo tanto distintos) y continúa el juego. El cazador conoce estas reglas y conoce el grafo G. Después de la k-ésima jugada él sabe si $w_k \neq v_k$, pero no recibe ninguna otra información.

Caracterice los grafos G para los cuales el cazador tiene una estrategia que garantice que él capture al conejo en a lo sumo N jugadas para algún N entero positivo. Aquí N debe depender solamente de G y la estrategia debe funcionar independientemente de la posición inicial y la trayectoria del conejo.

Nota: Un grafo es *simple* si sus aristas no son direcionadas, toda arista une dos vértices distintos y entre dos vértices hay a lo sumo una arista. Un grafo simple es *finito* si tiene un número finito de vértices. Un grafo simple es *conexo* si entre cualesquiera dos vértices hay un camino (formado por aristas) uniendo los dos vértices.

propuesto por *Nicolau Corção Saldanha , PUC-Rio, Brasil*

Solución. Si el cazador tiene estrategia puede contar su estrategia al conejo que lo captura del mismo modo. Vamos a ver que el grafo no puede contener un ciclo $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ con $n \geq 3$ (con P_i conectado con P_{i+1} para $1 \leq i \leq n$, donde tomamos los índices módulo n, o sea, $P_{n+1} = P_n$). De hecho, si el conejo conoce la estrategia del cazador, o sea, la sucesión de vértices que va a recorrer (la cual podemos suponer que solo pasa por vértices del ciclo pues el conejo no va a salir del ciclo), el siempre puede escapar pues siempre tiene dos opciones: si esta en P_i puede ir a P_{i-1} o P_{i+1}, y uno de estos vértices es distinto al vértice donde va el cazador en el próximo paso (y que estamos suponiendo que el conejo conoce).

Así, si el cazador tiene estrategia, el grafo tiene que ser un árbol. En este caso, podemos asignar paridades (0 o 1) a los vértices de modo que toda arista une un vérice de paridad 0 a otro de paridad 1, y luego la posición del conejo cambia de paridad a cada paso. Si el grafo es un árbol que contiene un camino C con vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tal que cualquier otro vértice w está a una distancia a lo sumo 2 de algun v_i, vamos a ver que el cazador gana. Supongamos por un momento que, por alguna razón, el cazador conozca la paridad de la posición inicial del conejo, que, digamos, sea la misma de v_1 (si no es esta, el cazador comienza en v_2 y se mueve a v_1 en la siguiente jugada). Así, el cazador empieza en v_1, y siempre va a estar en un vértici de la misma paridad del conejo. Si $w_{11}, w_{12}, ..., w_{1i_1}$ son los vértices del grafo distintos que no están en el camino y son adyacientes a v_1, el cazador empieza con $v_1, w_{11}, v_1, w_{12}, ..., v_1, w_{1i_1}, v_1$, garantizando que, si el conejo empieza fuera del camino en una rama que sale de v_1 entonces el cazador lo atrapa. Si no lo atrapó, se mueve a v_2 y, si $w_{21}, w_{22}, ..., w_{2i_2}$ son los vértices del grafo distintos que no están en el camino y son adyacientes a v_2, el cazador sigue con $v_2, w_{21}, v_2, w_{22}, ..., v_2, w_{2i_2}, v_2$, garantizando que, si en el momento en que el cazador se movió a v_2 el conejo esta fuera del camino en una rama que sale de v_2 entonces el cazador lo atrapa. Si no, el cazador se mueve a v_3 y así sucesivamente. El conejo nunca puede pasar a un vértice de ínbdice menor que el del cazador, si no es atrapado, y luego el cazador atrapa el conejo en algun momento hasta llegar al final del camino (y recorrer en entorno inmediato de v_n). Si no resulta es por que la paridad estaba equivocada, y el cazador, al final, se queda por un paso más en v_n, cambiando para la paridad correcta, y recurre del mismo modo el camino en la dirección opuesta hasta atrapar el conejo.

Si no es este el caso, el árbol tiene un vértice P y tres otros vértices Q_1, Q_2 y Q_3 pertenecientes a ramas distintas con relación a P tales que $\text{dist}(Q_j, P) = 3$ para $j = 1, 2, 3$. De hecho, considere dos vértices del árbol a distancia máxima y el camino $v_1, v_2, \ldots, v_n$ que los une. Si de algun vértice v_i sale una rama v_i, w_1, w_2, w_3 fuera del camino de tamaño (por lo menos) 3, i no puede pertenecer a $\{1, 2, 3, n-2, n-1, n\}$ (por ejemplo, si i fuera $n-2$ el grafo contendria el camino mas grande $v_1, ..., v_{n-2}, w_1, w_2, w_3$, una contradicción). Así, podríamos tomar $P = v_i$, $Q_1 = v_{i-3}$, $Q_2 = v_{i+3}$ y $Q_3 = w_3$.

Vamos a ver que, en este caso, el conejo (sabiendo la estrategia del cazador) puede escapar. No hay pérdida de generalidad en suponer que el cazador conoce la paridad de la posición inicial del conejo y se mantiene en la misma paridad del conejo. El conejo siempre va a estar en P o en las ramas que unen P a Q_1, Q_2 o Q_3, y podemos suponer que el cazador también. Digamos que, para $i = 1, 2, 3$, la rama que une P a Q_i sea P, X_i, Y_i, Q_i. Podemos asignar una sucesión de $0, 1, 2, 3$ al camino del cazador, respectivamente (y también al del conejo), de acuerdo a las ramas en que estén (con 0 correspondiendo a P). Si el cazador vuelve al 0 en una progresión aritmética finita de razón 2 de momentos, el conejo se queda en una rama (digamos la de número j), evitando al cazador. Elegimos esta rama de modo que j sea distinto al número de la rama en que estaba el cazador luego antes del primer 0 de esta progresión aritmética y también distinto al número de la rama en que estaba el cazador luego después del último 0 de esta progresión aritmética. Si el cazador va a 0 en esta progresión, el conejo va a Y_j; si entre dos ceros consecutivos el cazador va a X_j, el conejo va a Q_j, y si el cazador va a Q_j el conejo va a X_j. Cuando el cazador interrumpe la progresión aritmética finita de razón 2 de momentos en que visita el 0, va a dar por lo menos 3 pasos sin pasar por el 0, dando tiempo del conejo llegar al 0 en dos pasos y cambiar de rama como quiera siguiendo el plan que describimos (si el cazador hace una sucesión de pasos consecutivos sin pasar por el 0, el conejo puede pasar por el 0 a cada dos pasos, cuidando solamente que en el paso intermedio no vaya a la misma rama que el cazador).

Respuesta: Los grafos G para los cuales el cazador tiene una estrategua como en el enunciado son los árboles (grafos sin ciclos) que contienen un camino C con vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tal que cualquier otro vértice w está a una distancia a lo sumo 2 de algun v_i. Equivalentemente, los grafos G para los cuales el cazador **no** tiene una estrategia son los grafos que tienen algun ciclo o los árboles que tienen un vértice P y tres otros vértices Q_1, Q_2 y Q_3 pertenecientes a ramas distintas con relación a P tales que $\mathrm{dist}(Q_j, P) = 3$ para $j = 1, 2, 3$.