

RELACIONES ENTRE LONGITUD DE PALABRA, LONGITUD HIPERBÓLICA Y NÚMERO DE AUTO-INTERSECCIÓN DE CURVAS EN SUPERFICIES

MOIRA CHAS

TRADUCTOR: TOMÁS MEJÍA

RESUMEN. Considere una superficie orientable Σ con característica de Euler negativa, un conjunto minimal de generadores para el grupo fundamental de Σ , y una métrica de curvatura constante -1 en Σ . Cada clase de homotopía (no basada) C de curvas cerradas orientadas en Σ determina tres números: la longitud de palabra (es decir, el mínimo número de letras necesarias para expresar a C como una palabra cíclica en los generadores y sus inversas), el mínimo número de auto-intersección geométrica, y finalmente la longitud geométrica. Estos tres números pueden ser calculados explícitamente (o aproximados) usando una computadora.

Discutiremos algunas relaciones entre estos números y su estructura estadística cuando la longitud se hace muy grande.

ÍNDICE

1. Introducción	2
2. Superficies: Topología y Geometría	3
2.1. Topología: Palabras de superficie	3
2.2. Geometría: Métricas hiperbólicas en superficies	5
3. Crecimiento del número de curvas cerradas en superficies: Topología y Geometría	5
3.1. Clases de homotopía libre de curvas cerradas en superficies	5
3.2. Topología: Crecimiento del número de clases de homotopía libre de curvas por longitud de palabra	6
3.3. Geometría: Crecimiento del número de geodésicas por longitud geométrica	6
4. Números de auto-intersección de curvas cerradas en superficies	8
4.1. Calcular el número de auto-intersección a partir de palabras de curvas	9
5. Relaciones entre la longitud de palabra y el número de auto-intersección	10
5.1. Máxima auto-intersección para una longitud de palabra dada	12
5.2. Conjeturas	12
6. Crecimiento del número de geodésicas con una auto-intersección dada	13
6.1. Crecimiento del número de geodésicas simples	13
6.2. Crecimiento del número de geodésicas con auto-intersección mayor que cero	15
7. Relaciones entre la longitud geométrica y el número de auto-intersección	15
7.1. Cotas inferiores para la longitud de la geodésica más corta con una auto-intersección dada	17
8. Estadísticas que relacionan longitud geométrica, longitud de palabra y auto-intersección	19

2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary 57M50.

Key words and phrases. hyperbolic, surfaces, geodesics, length, word length, intersection number.

8.1. Muestreo de auto-intersección por longitud de palabra	19
8.2. Muestreo de auto-intersección por longitud geométrica	20
8.3. Muestreo de longitud geométrica por longitud de palabra	21
Apéndice A. Cómo muestreamos por longitud geométrica	22
A.1. El espacio de pantalones	22
A.2. El toro con una componente de frontera	23
Referencias	25

1. INTRODUCCIÓN

Lo siguiente puede ser visto como una especie de teoría de números no conmutativa experimental que es posible gracias a la llegada de las computadoras. Muchos patrones de curvas en superficies son observados mediante cómputos. El patrón en la Figura 1 es uno de éstos.

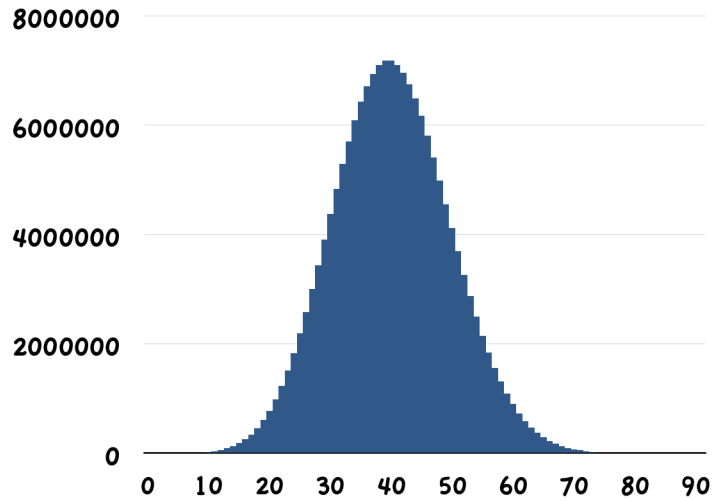


FIGURA 1. Histograma de todas (cerca de 175,000,000) las clases de homotopía libre en el toro con una punción que no son potencias y cuya longitud de palabra es $L = 20$, organizadas por número de auto-intersección. La media del número de auto-intersección es $400/9 \sim 45$.

Este cómputo llevó a la prueba [8] de

Teorema 1.1. *En una superficie con frontera no vacía y característica de Euler negativa χ , la proporción de palabras w con longitud de palabra L tales que*

$$a < \frac{\text{SI}(w) - \kappa \cdot L^2}{\sigma L^{3/2}} < b$$

converge a $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ cuando L tiende a infinito, donde

$$\kappa = \frac{\chi}{3(2\chi - 1)} \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \frac{2\chi(2\chi^2 - 2\chi + 1)}{45(2\chi - 1)^2(\chi - 1)}.$$

En otras palabras, cuando L es muy grande, la distribución de la auto-intersección de todas las clases de homotopía libre con longitud de palabra L se aproxima a una Gaussiana con media $\kappa \cdot L^2$ y desviación estándar $\sigma \cdot L^{3/2}$.

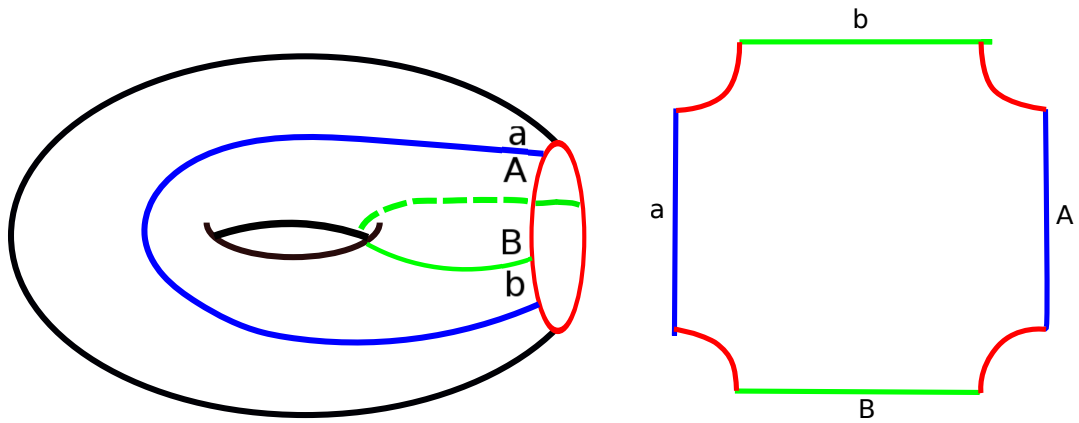


FIGURA 2. “Cortes” del toro

Observación 1.2. El valor esperado de las intersecciones de n cuerdas aleatorias en un círculo es $\frac{n(n-1)}{6}$ y la varianza es $\frac{n(n-1)(n+3)}{45}$, [28, Capítulo 6] (Aquí una cuerda aleatoria es determinada por dos puntos ubicados en la circunferencia de manera independiente y aleatoria, con distribución uniforme). Compárese con lo siguiente: cuando la característica de Euler χ es muy grande, la media de las auto-intersecciones de todas las clases con longitud de palabra L es cercana a $\frac{L^2}{6}$ cuando L es grande, y la varianza es cercana a $\frac{L^3}{45}$.

Reconocimientos: Parte de estas notas se ocupan de los resultados acerca de los que la autora habló en un simposio de la Vigésima Novena Conferencia Anual de la Ramanujan Math Society, en el IISER, Pune. La autora aprecia la amable hospitalidad recibida en Pune. Ella también desearía expresar su gratitud a Madhav Modak por su minuciosa y perspicaz lectura del manuscrito y a Ravi Kulkarni por su estímulo para escribirlo. Este trabajo fue apoyado por NSF 1105772.

2. SUPERFICIES: TOPOLOGÍA Y GEOMETRÍA

2.1. Topología: Palabras de superficie. En líneas generales, una superficie es un espacio tal que el paisaje alrededor de cada uno de sus puntos es “como” el plano euclídeo. Una superficie con frontera es un espacio tal que el paisaje alrededor de cada uno de sus puntos es “como” el plano euclídeo o “como” el semi-plano superior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } y \geq 0\}$.

La definición precisa de superficie se puede encontrar, por ejemplo, en [16] en inglés y [23] en español.

La definición de característica de Euler se puede encontrar en [17].

Considere una superficie orientable Σ con frontera no vacía y característica de Euler negativa (hemos elegido trabajar con superficies con frontera para simplificar la discusión, pero varios aspectos discutidos en esta subsección pueden ser replicados para superficies cerradas). Considere un conjunto maximal de arcos disjuntos de manera que cada uno empiece y termine en la frontera, y tal que al remover la unión de los arcos la superficie siga siendo conexa (ver Figura 2, izquierda). Note que la conexidad y la maximalidad implican que no puede ocurrir que dos de los arcos sean homotópicos mediante homotopías que mantengan los extremos en la frontera.

Etiquete un lado de cada arco con la letra x y el otro lado con la letra \bar{x} (o X mayúscula; usaremos ambas notaciones intercambiabilmente). La elección de arcos determina un conjunto minimal de generadores del grupo fundamental de Σ : escoja un punto base P en la superficie que esté en el complemento de los arcos elegidos. Un representante del generador etiquetado x es una curva que comienza en P , cruza el arco etiquetado x lado etiquetado x al lado etiquetado \bar{x} y regresa a P sin cruzar ningún otro arco (ver Figura 4, izquierda). Cortando la superficie a lo largo de estos arcos se obtiene un polígono en el que el número de lados es cuatro veces

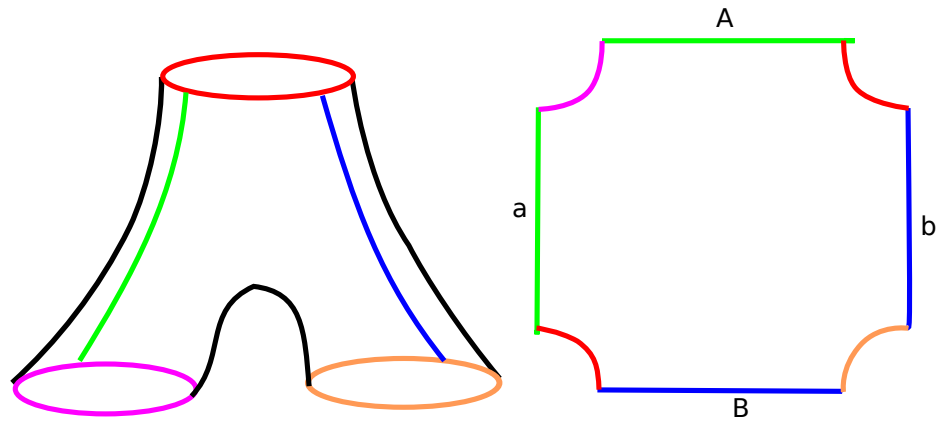
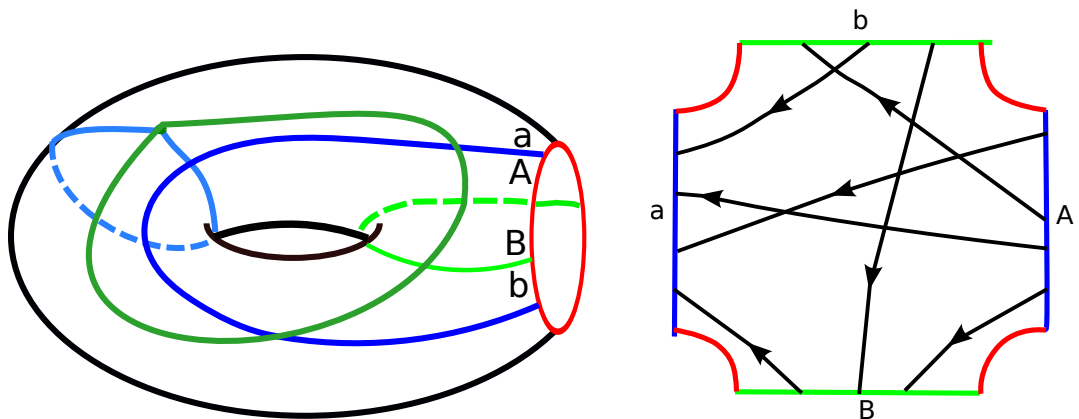


FIGURA 3. “Cortes” del espacio de pantalones

FIGURA 4. Dos representantes de generadores del grupo fundamental del toro con una componente de frontera y los correspondientes arcos etiquetados (izquierda), y un representante de la curva $aaabaBB$ (derecha)

el número de generadores (ver Figura 2). Las aristas alternadas están etiquetadas. Leyendo las etiquetas de las aristas en orden cíclico se obtiene una palabra cíclica (*cíclica* significa que es salvo permutación cíclica). Esta es llamada la *palabra de superficie*. En el ejemplo de la Figura 2 la palabra de superficie (escrita linealmente) es $abAB$. En el ejemplo de la Figura 3 la palabra de superficie (escrita linealmente) es $aAbB$.

Ejercicio 1. (a) Pruebe que la característica de Euler de la superficie es $1 - n$, donde n es el número de arcos escogidos.

(b) Pruebe que el número (mínimo) de generadores del grupo fundamental de la superficie es n .

Nuestros ejemplos de un toro con una componente de frontera y el espacio de pantalones son excepcionales en el sentido en que hay (salvo isomorfismos obvios) una sola palabra de superficie para cada una de estas superficies. En general, más de una palabra de superficie puede corresponder a una misma superficie.

Ejercicio 2. (a) Encuentre dos (o más) palabras de superficie diferentes que correspondan a una superficie de género dos con una sola componente de frontera.

(b) Encuentre dos (o más) palabras de superficie diferentes que correspondan a una superficie de género cero y cuatro componentes de frontera.

(Las palabras de superficie en cada caso deben ser realmente diferentes. Por ejemplo, las palabras $abcABC$, $AbcaBC$, $bcaBCA$ no son realmente diferentes).

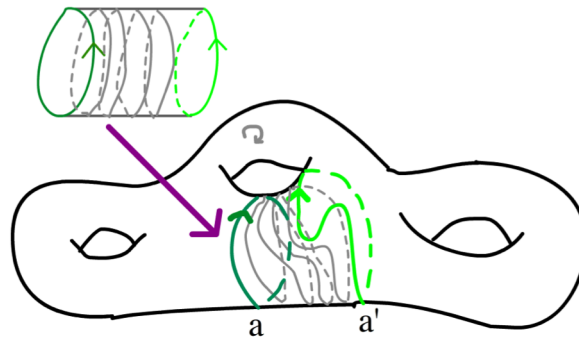


FIGURA 5. Una homotopía (libre) entre las curvas a y a' .

Hasta este punto no hemos usado el hecho de que una arista sea etiquetada en un lado con x y en el otro lado con \bar{x} . Ésto tendrá su aparición cuando discutamos curvas en superficies. Veremos entonces que la palabra de superficie no sólo codifica la información topológica de la superficie (género y número de componentes de frontera) sino que también codifica implícitamente la estructura de la intersección de curvas en la superficie.

2.2. Geometría: Métricas hiperbólicas en superficies. Una *métrica hiperbólica* en una superficie es una métrica con curvatura constante -1 . Por una *superficie hiperbólica* nos referimos a una superficie con característica de Euler negativa y con una métrica hiperbólica completa (en el sentido en que toda sucesión de Cauchy tiene límite), tal que si la superficie tiene frontera no vacía, entonces todas las componentes de frontera son geodésicas (ver la Sección 3.3 para la definición de una geodésica). Usualmente asumiremos que la superficie es compacta, pero algunas de las afirmaciones de abajo admiten que dicha superficie hiperbólica posea finitas punciones. En este caso la métrica hiperbólica tiene que ser incrementada para recuperar la completitud. Cada punción produce un extremo con forma de cuerno infinitamente largo.

Si el polígono en la Figura 2 se dibuja en el plano hiperbólico con ángulos rectos y con las condiciones de longitud naturales, entonces pueden pegarse los lados para obtener un toro con frontera suave geodésica, (ver también el Apéndice A). De manera similar pueden ser obtenidas las superficies cerradas y otras superficies con frontera con una métrica hiperbólica; para más detalles, véase [6, Capítulo 3].

3. CRECIMIENTO DEL NÚMERO DE CURVAS CERRADAS EN SUPERFICIES: TOPOLOGÍA Y GEOMETRÍA

3.1. Clases de homotopía libre de curvas cerradas en superficies. Estamos interesados en estudiar clases de equivalencia de curvas cerradas dirigidas en la superficie Σ salvo deformación continua. Considere dos curvas cerradas orientadas a y b en Σ , esto es, dos aplicaciones a y b del círculo orientado en Σ . Las curvas a y b se dicen *libremente homotópicas* si existe una aplicación de un cilindro C a Σ tal que la restricción de esta aplicación a una de las componentes de frontera (orientadas) de C coincide con a y la restricción a la otra coincide con b .

El conjunto de clases de equivalencia bajo esta relación es el conjunto de *clases de homotopía libre de curvas cerradas en Σ* , y será denotado por π_0 .

Hay una biyección natural entre π_0 y el conjunto de componentes del espacio de aplicaciones del círculo a Σ , con la topología compacto-abierta. Ésta es la razón por la cual el conjunto de clases de homotopía libre es denotado por π_0 . (Esta biyección es cierta para espacios más generales que superficies, en específico, espacios arco-conexos).

Aquí damos otra interpretación de π_0 (ver [?]), que funciona para espacios arco-conexos.

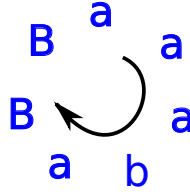


FIGURA 6. Una palabra cíclica reducida.

Proposición 3.1. *Si Σ es una superficie conexa, entonces hay una biyección entre el conjunto de clases de homotopía libre de curvas cerradas dirigidas en Σ y el conjunto de clases de conjugación de $\pi_1(\Sigma, x_0)$.*

3.2. Topología: Crecimiento del número de clases de homotopía libre de curvas por longitud de palabra. Considere un representante de una clase de homotopía libre de curvas que intersecte la unión de los arcos en el menor número posible de puntos (las intersecciones se cuentan con multiplicidad). La clase de homotopía libre es etiquetada por una palabra cíclica reducida obtenida al llevar registro de los arcos (y lados) que la curva atraviesa a medida que se recorre la curva dirigida. (*Cíclica* quiere decir que las palabras se consideran salvo permutación cíclica, *reducida* significa que ninguna letra x y su inversa \bar{x} aparecen consecutivamente en la palabra, o alguna permutación cíclica de la palabra). En la Figura 6 se exhibe un ejemplo de una palabra cíclica reducida.

La clase de la curva en la Figura 4 (derecha) es etiquetada con la palabra cíclica $aaabaBB$. (Observe que $aaabaBB$ es una *palabra de curva*, en contraste con las *palabras de superficie* como por ejemplo $abAB$, que se asoció al toro con una componente de frontera). Por la Proposición 3.1, la palabra cíclica $aaabaBB$ etiqueta una clase de conjugación del grupo fundamental de Σ . (Recuerde que el grupo fundamental de una superficie con frontera es un grupo libre). Así, los elementos en el grupo fundamental pueden pensarse como palabras reducidas en los generadores y sus inversas, mientras que las clases de conjugación pueden pensarse como palabras cíclicas reducidas.

De esta manera, una vez que se haya elegido un conjunto de generadores del grupo fundamental, se puede asociar a cada clase de homotopía libre un entero positivo: el número de letras de la palabra más corta en la clase de conjugación.

El siguiente resultado no es difícil de probar.

Proposición 3.2. *El número total $N(L)$ de clases de homotopía libre de longitud de palabra L es asintótico a $(2d - 1)^L/L$, donde d es el número de generadores del grupo fundamental. Más explícitamente, $\frac{(2d-1)^L/L}{N(L)} \rightarrow 1$ cuando $L \rightarrow \infty$.*

3.3. Geometría: Crecimiento del número de geodésicas por longitud geométrica. En esta subsección, vamos a suponer que Σ es una superficie orientable con o sin frontera, y con característica de Euler negativa.

Recuerde que una curva es una *geodésica* si realiza el camino más corto entre cualesquiera dos puntos cercanos sobre sí misma.

Dado que Σ tiene característica de Euler negativa, puede ser dotada con una métrica hiperbólica (Subsección 2.2). Las métricas hiperbólicas producen representantes “óptimos” (en el sentido del Teorema 4.1) de clases de homotopía libre de curvas.

Teorema 3.3. *Cada clase de homotopía libre contiene un único representante que es una geodésica cerrada (a menos que dé vueltas alrededor de una punción).*

Observación 3.4. El Teorema 3.3 no es cierto para métricas hiperbólicas con punciones. En efecto, no hay geodésicas en la clase de curvas que da una vuelta alrededor de una punción.

Ver [6, Proposición 1.6.6] para una prueba del Teorema 3.3. Esta única representante geodésica, *la* geodésica, juega un papel similar al de una línea recta en la superficie: más específicamente, si dos puntos en la geodésica están suficientemente cerca, el camino más corto entre todos los que unen los puntos es precisamente el arco de la geodésica entre ellos.

Podemos preguntarnos cuál es la razón de crecimiento de la cardinalidad del conjunto de todas las geodésicas cerradas con longitud menor o igual que L . Muchos investigadores contribuyeron a la respuesta de este problema, entre ellos Huber, Margulis, Randol y Selberg. Denote por $\mathcal{C}_\Sigma(L)$ el cardinal del conjunto de geodésicas cerradas en Σ que no son potencias propias de otras geodésicas y tienen longitud menor o igual a L (las geodésicas que no son potencias propias de otras geodésicas son frecuentemente llamadas *primitivas*). Éste es un conjunto finito [6, Teorema 1.6.11].

Ver [6, Teorema 9.4.14] para una prueba del siguiente resultado.

Teorema 3.5. *Teorema de los Números Primos para Superficies Hiperbólicas Cerradas:*

$$\mathcal{C}_\Sigma(L) \sim \frac{e^L}{L}.$$

Aquí, $a(L) \sim b(L)$ quiere decir $\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{a(L)}{b(L)} = 1$.

Teorema 3.6. *Teorema de los Números Primos para Superficies Hiperbólicas con Frontera Geodésica:*

$$\mathcal{C}_\Sigma(L) \sim \frac{e^{hL}}{hL}.$$

Aquí, h es la entropía del flujo geodésico. Esta entropía equivale a la dimensión de Hausdorff del Conjunto de Cantor al infinito, el cual es la clausura de los puntos extremos al infinito de los levantamientos de geodésicas cerradas [29]. En el caso de superficies cerradas, $h = 1$. Ver, por ejemplo, [27] para una definición precisa de entropía. Una prueba del Teorema de los Números Primos para Superficies Hiperbólicas con Frontera puede encontrarse en [18], ver también [12]. El caso de las superficies con punciones es más complicado.

Ejemplo 1. Para ilustrar estas ideas, hemos considerado un espacio de pantalones hiperbólico (2.5, 2.6, 5) como en la Definición A.4 y hemos computado las longitud geométrica de todas las geodésicas más cortas de 50 (ver Apéndice A.1). Hemos computado la longitud de todas las geodésicas con longitud de palabra no mayor a 20 (20 era la máxima longitud de palabra que nuestra computadora podía manejar en una cantidad razonable de tiempo). Por el Corolario A.2, este conjunto de geodésicas contiene todas las geodésicas de longitud hasta 50 (ya que la constante C del Corolario A.2 es $2.5 = \min\{2.5, 2.6, \frac{5}{2}\}$).

Para estimar h en este caso, resolvemos numéricamente para h en la ecuación

$$\frac{e^{50h}}{50h} = 8,532,116.$$

(8,532,116 es el número total de geodésicas con longitud menor a 50 en este espacio de pantalones). Obtuvimos 0.378 como el valor aproximado de h , que es la dimensión de Hausdorff del conjunto límite. Para cada entero $L \in \{1, 2, \dots, 50\}$, graficamos el punto $(L, \mathcal{C}_\Sigma(L))$ (recuerde que $\mathcal{C}_\Sigma(L)$ es el número total de geodésicas con longitud hasta L) junto con la función $F(x) = \frac{e^{0.378x}}{0.378x}$ en la Figura 7, izquierda.

Observación 3.7. En todos estos cálculos, dado que estamos únicamente interesados en el conteo, consideramos geodésicas no orientadas. El número de geodésicas orientadas se obtiene duplicando el número de geodésicas no orientadas.

Ejemplo 2. Nosotros consideramos el toro rectangular (14, 16) (Definición A.7) y todas las geodésicas con longitud hasta 280, y procedimos como en el Ejemplo 1. Los resultados se muestran en la Figura 7, derecha. Aquí nuestra estimación de h es 0.0736 (43,335,144 es el

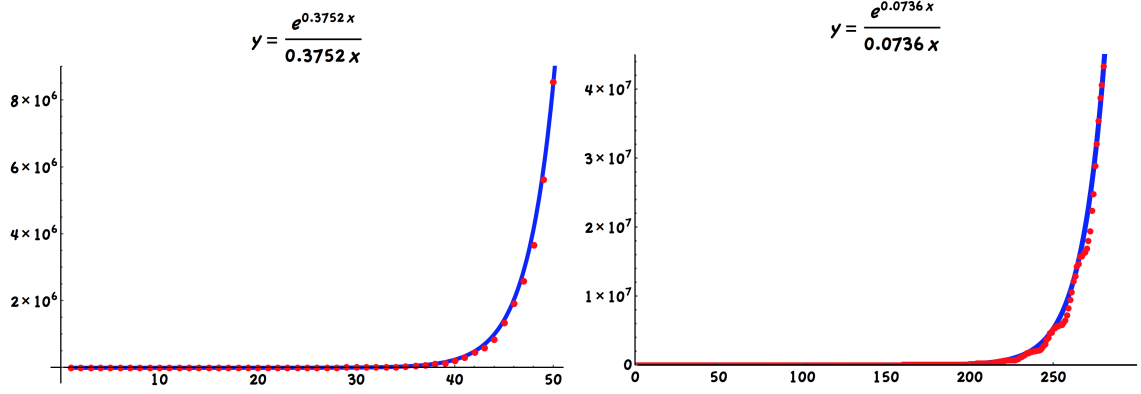


FIGURA 7. Los puntos $(L, \mathcal{C}_\Sigma(L))$, $L \in \{1, 2, \dots, 50\}$ y la función $F(x) = \frac{e^{0.378x}}{0.378x}$ para el espacio de pantalones (arriba), y los puntos $(L, \mathcal{C}_\Sigma(L))$, $L \in \{1, 2, \dots, 280\}$ y la función $F(x) = \frac{e^{0.0736x}}{0.0736x}$ para el toro (abajo).

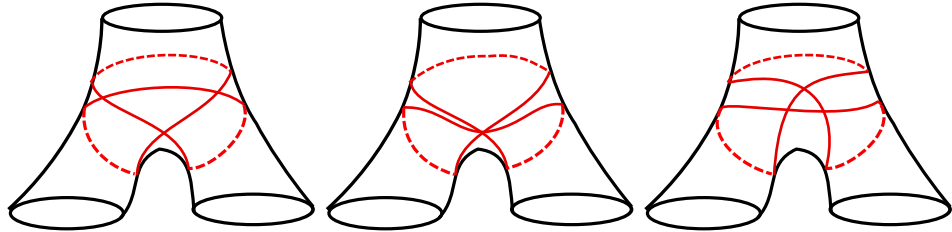


FIGURA 8. Tres representantes de la clase de homotopía libre en los pantalones.

número total de geodésicas en esta métrica con longitud menor que 280). Esta dimensión es tan pequeña porque la longitud de la frontera geodésica, aproximadamente 57.227, es grande (comparada con la longitud de los generadores).

Observación 3.8. Note que el crecimiento del número de geodésicas en una superficie cerrada es independiente de la geometría y la topología de la superficie, mientras que el crecimiento del número de geodésicas en superficies con frontera depende de la geometría de la superficie.

4. NÚMEROS DE AUTO-INTERSECCIÓN DE CURVAS CERRADAS EN SUPERFICIES

A cualquier clase de curvas se le asocia naturalmente un número no negativo, el *número de auto-intersección*. Éste es el número de veces más pequeño que algún representante de la clase se cruza a sí mismo. Por ejemplo, el número de auto-intersección de las curvas en la Figura 8 es 3. El *número de auto-intersección de una clase de homotopía libre de curvas* w , denotado por $SI(w)$, es el mínimo de todos los números de auto-intersección de curvas en w . En la Figura 8, se exhiben tres representantes de la misma clase de homotopía libre. El número de auto-intersección de la clase es 3 (más adelante daremos una idea de por qué 3 es la respuesta).

Recuerde del Teorema 3.3 que cada clase libre de homotopía tiene un único representante que es una geodésica.

Teorema 4.1. *El número de auto-intersección del representante geodésico de una clase libre de homotopía es igual al número de auto-intersección de la clase. En otras palabras, el número de auto-intersección de la geodésica es el mínimo número posible para cualquier representante.*

El Teorema 4.1 fue notado por Poincaré para el caso de auto-intersección cero.

El Teorema 4.1 es una consecuencia de [13, Teorema 2], donde se afirma que una curva a que tiene número de auto-intersección más grande que el mínimo, tiene un *bigon singular* o

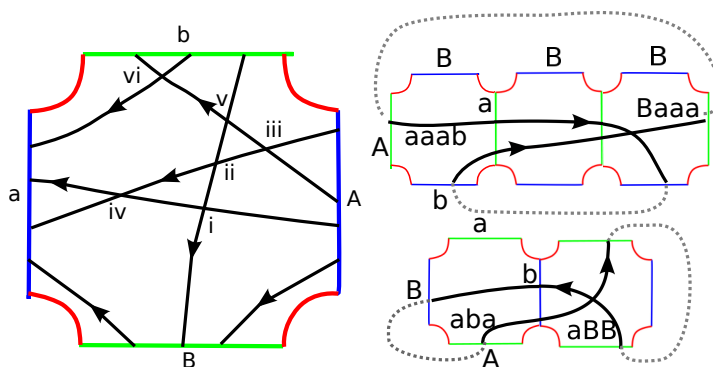


FIGURA 9. Un representante de la clase $aaabaBB$ en el toro con una componente de frontera

un *monogon singular* (las palabras “bigon” y “monogon” son “abusos” del idioma inglés para referirse a polígonos de dos lados o un lado respectivamente). Un *bigon singular* consiste de un par de arcos disjuntos del círculo cuyos extremos son enviados por a a los mismos puntos y sus imágenes encierran un disco (no necesariamente embebido) en la superficie. Ahora bien, nótese que si una curva tiene un bigon singular, entonces no habrá dos levantamientos de esta curva a la cubierta universal que encierren un bigon. Pero en la cubierta universal estos levantamientos son líneas rectas, y hay una única línea que pasa a través de cada par de puntos. Luego tendríamos una contradicción si el representante geodésico no tuviese el mínimo número de auto-intersecciones.

Observación 4.2. El hecho de que una geodésica realiza el mínimo número de intersección muestra de nuevo cuán entrelazados están el universo combinatorial y el universo geométrico.

Hemos visto que se pueden asociar tres números a una clase de homotopía libre de curvas cerradas w : el número de auto-intersección $SI(w)$, la longitud de palabra $WL(w)$ (suponiendo una elección dada de un conjunto de generadores para el grupo fundamental), y la longitud geométrica $GL(w)$ (suponiendo una elección de una métrica hiperbólica en la superficie).

Observación 4.3. La clase de homotopía libre en la Figura 8 presenta una característica muy interesante: el único “dibujo” que puede lograrse con un representante geodésico es el de la izquierda. Esto fue notado por Hass y Scott en [14], donde ellos dieron la siguiente prueba, debida a Agol. Si la curva de la derecha es el “dibujo” de una geodésica, entonces la superficie menos la curva tiene cinco componentes conexas; los tres “puños” (siguiendo con el lenguaje textil ahora que hablamos de pantalones), un triángulo y un hexágono. No es difícil ver que la suma de los ángulos interiores del hexágono equivale a 6π menos el doble de la suma de los ángulos interiores del triángulo. Dado que la suma de los ángulos interiores del hexágono es menor que 4π , la suma de los ángulos interiores del triángulo es mayor que π , una contradicción. (La noción precisa de “dibujo” (picture) está dada en [14]).

4.1. Calcular el número de auto-intersección a partir de palabras de curvas. Birman y Series [4] hallaron un algoritmo para determinar si una clase de homotopía libre (dada como una palabra cíclica reducida) de curvas en una superficie con frontera es *simple*, es decir, tiene número de auto-intersección 0. Cohen y Lustig [11] extendieron el método de Birman y Series para estudiar el número de intersección de una clase en una superficie con frontera. Lustig [20], usando argumentos análogos (aunque más intrincados), dio un algoritmo para determinar números de auto-intersección en una superficie cerrada.

Observación 4.4. A pesar de que los números de auto-intersección dependen únicamente de la topología de la superficie, las pruebas de algoritmo de Cohen-Lustig-Birman-Series usan geometría hiperbólica.

	Par de sub-palabras
i	aa, BB
ii	aa, BB
iii	aab, Baa
iv	$Baaa, aaab$
v	aba, aBB
vi	aba, BBa

TABLA 1. Pares ligados de la palabra $aaabaBB$. Las etiquetas i, ii, \dots, vi corresponden a la Figura 9.

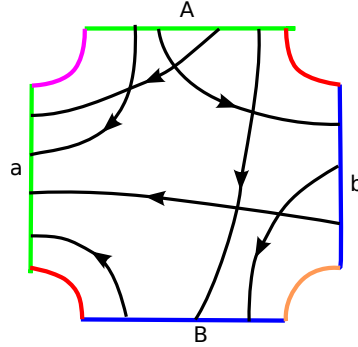


FIGURA 10. Un representante minimal de la clase $aaabaBB$ en los pantalones.

No explicaremos el algoritmo aquí pero daremos una idea aproximada de una forma equivalente del algoritmo de Birman-Series-Cohen-Lustig que aparece en [7]. El punto de auto-intersección etiquetado i en la Figura 9 está en la intersección del arco de la curva que va desde la arista etiquetada b hasta la arista etiquetada B , y el arco de la curva que va desde la arista etiquetada A hasta la arista etiquetada a . La primera arista corresponde a la sub-palabra BB de la palabra cíclica $aaabaBB$, y la segunda arista corresponde a la segunda ocurrencia de la sub-palabra aa en $aaabaBB$. El lado derecho de la Figura 9 es una ilustración de otro tipo de par de sub-palabras que implica una intersección.

Nótese que este punto de intersección no depende de las propiedades “globales” de la palabra. De hecho, cualquier palabra que contenga las sub-palabras BB y aa tendrá un punto de auto-intersección en arcos análogos. En general, hay una correspondencia uno-a-uno entre las ocurrencias de ciertos pares de sub-palabras y los puntos de auto-intersección de un representante de una clase (que se interseca a sí mismo en el mínimo número posible de puntos). Los pares de sub-palabras de $aaabaBB$ que corresponden a los puntos de auto-intersección de representantes minimales están listados en la Tabla 1.

Observación 4.5. Los pares de sub-palabras que determinan el número de auto-intersección de una curva dependen únicamente de la palabra de superficie. Por ejemplo, la palabra de curva $aaabaBB$ tiene auto-intersección 7 en el toro con una componente de frontera asociado a la palabra de superficie $abAB$ (Figura 9) y auto-intersección 5 en el espacio de pantalones asociado a la palabra de superficie $aAbB$.

5. RELACIONES ENTRE LA LONGITUD DE PALABRA Y EL NÚMERO DE AUTO-INTERSECCIÓN

El algoritmo de Birman-Cohen-Lustig, o su forma equivalente [7] pueden ser programados. Nosotros lo hicimos y encontramos las siguientes tablas, organizando palabras cíclicas por longitud de palabra y auto-intersección. Más precisamente, denote por $P(K, L)$ el número de clases de homotopía libre de curvas no dirigidas que no son potencias en el espacio de pantalones y

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	0	0	5	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	0	0	2	10	8	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
6	0	0	0	6	17	14	13	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
7	0	0	0	2	12	28	34	38	22	8	8	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
8	0	0	0	0	6	20	46	76	79	50	52	40	20	12	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9	0	0	0	0	2	12	32	84	140	146	140	158	134	98	66	40	24	6	6	2	2	0	0	0	0	
10	0	0	0	0	0	6	20	52	146	226	264	330	371	358	339	274	206	120	91	72	33	22	6	4	0	
11	0	0	0	0	0	2	12	32	92	232	354	480	638	782	866	878	856	694	538	522	388	264	188	100	62	
12	0	0	0	0	0	0	6	20	52	156	345	550	818	1116	1502	1818	1998	2080	1944	1888	1786	1482	1314	1032	716	
13	0	0	0	0	0	0	2	12	32	92	244	506	852	1298	1888	2670	3374	4042	4458	4716	5078	4966	4768	4620	3974	
14	0	0	0	0	0	0	0	6	20	52	156	360	737	1282	1989	3056	4443	5836	7369	8750	10054	11208	12055	12744	12822	
15	0	0	0	0	0	0	0	2	12	32	92	244	524	1076	1870	3010	4738	7002	9602	12542	15784	19132	22398	25930	28954	
16	0	0	0	0	0	0	0	0	6	20	52	156	360	758	1548	2686	4449	7092	10664	15032	20370	26594	33450	41478	50056	
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	12	32	92	244	524	1100	2184	3840	6426	10328	15798	22666	31656	42538	55416	71432
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	20	52	156	360	758	1576	3050	5418	9116	14754	22761	33298	47451	65244	87852
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	12	32	92	244	524	1100	2216	4256	7550	12724	20718	32110	47774	69124	97002
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	20	52	156	360	758	1576	3086	5891	10412	17544	28578	44654	67144	98324

FIGURA 11. En la fila L , columna K , tenemos a $P(K, L)$, el número de clases de homotopía libre de curvas cerradas (no dirigidas) que no son potencias, en el **espacio de pantalones**, y tales que la longitud de la palabra es L y la auto-intersección es K .

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	5	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	8	4	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	4	8	16	20	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	12	8	16	24	56	12	28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	8	12	26	38	58	78	68	52	45	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	12	16	32	60	72	120	192	104	188	68	152	24	52	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	8	16	36	84	136	166	246	314	322	350	350	274	232	180	112	80	34	0	0	0	0	0	0	0
11	20	24	40	80	136	292	332	600	640	684	804	684	1024	488	852	264	536	132	296	40	84	0	0	0
12	8	20	52	104	186	330	524	704	1022	1348	1544	1790	1933	1896	1908	1806	1636	1410	1138	904	654	480	340	
13	24	24	52	132	228	376	608	1040	1248	2232	2376	3524	3488	4484	4452	4664	5268	3992	5196	2880	4368	1876	3308	
14	12	40	68	132	252	464	778	1290	1916	2624	3736	4992	6210	7670	9000	10234	11214	11886	12186	11818	11436	10788	9704	
15	16	40	84	152	284	524	904	1444	2484	3580	4948	7380	8936	12700	13674	19420	19184	26108	24908	30180	29224	30628	31308	
16	16	24	60	176	340	596	1072	1774	2808	4432	6600	9286	13138	17410	22406	28488	34735	41928	49332	56258	62838	68250	73080	
17	32	48	80	184	356	708	1180	1992	3140	4904	8224	11700	17832	23620	32384	41108	52236	67324	77952	101244	106908	138092	136448	
18	12	36	108	204	392	712	1272	2208	3816	6118	9382	14524	21072	29640	41840	56552	74910	97174	123214	152678	184688	219860	256646	
19	36	32	92	240	448	840	1424	2612	4108	7080	10564	16408	25160	36272	53612	72332	102576	128732	177452	214540	281348	336756	415164	
20	16	40	88	216	472	884	1632	2824	4704	7694	12434	19224	29104	43590	63098	89990	125784	171134	229774	301350	388639	492738	614798	

FIGURA 12. En la fila L , columna K , tenemos a $P(K, L)$, el número de clases de homotopía libre de curvas cerradas (no dirigidas) que no son potencias, en el **toro con una punción**, y tales que la longitud de la palabra es L y la auto-intersección es K .

con longitud de palabra L y número de auto-intersección K . (Note que hay exactamente el doble de curvas dirigidas que no dirigidas).

Por ejemplo, en los pantalones con palabra de superficie $aAbB$ hay exactamente dos clases de homotopía libre de curvas no dirigidas que no son potencias y con longitud de palabra uno y auto-intersección cero, precisamente a y b . En este caso, $P(0, 1) = 2$. Similarmente, hay una sola clase de homotopía libre de curvas no dirigidas que no es potencia con longitud de palabra 2 y auto-intersección 1, la “figura ocho”, aB . Entonces $P(1, 2) = 1$.

Las Figuras 11 y 12 exhiben muchos patrones. En esta subsección, así como en la subsección 8.1 discutiremos algunos de los patrones que hemos probado en conjunto con otros autores, e indicaremos los que hemos visto pero aún no han sido probados.

5.1. Máxima auto-intersección para una longitud de palabra dada. El siguiente resultado es probado en [10, Teorema 1.7].

Teorema 5.1. *Para cada clase de homotopía libre de curvas w en los pantalones, $SI(w) \geq \left\lfloor \frac{WL(w)-2}{2} \right\rfloor$, donde $\lfloor x \rfloor$ denota el entero más grande que es menor o igual a x . Esta cota es óptima.*

El siguiente hecho es una consecuencia directa del Teorema 5.1, [10, Corolario 1.8].

Teorema 5.2. *El espacio de pantalones es la única superficie con característica de Euler negativa que tiene sólo finitas clases de homotopía libre de curvas con una auto-intersección dada.*

Teorema 5.3. *El máximo número de auto-intersección de una clase de homotopía libre (posiblemente una potencia) en el espacio de pantalones con longitud de palabra L está acotada superiormente por $\frac{L^2}{4} + \frac{L}{2} - 1$. Si L es par entonces esta cota es óptima.*

El máximo número de auto-intersección de una clase de homotopía libre que no es potencia en el toro con una punción y con longitud de palabra L es $\left\lfloor \frac{L^2-2}{4} \right\rfloor$. Esta cota es óptima.

5.2. Conjeturas. La Figura 11 nos lleva a lo siguiente:

Conjetura 1. *En el espacio de pantalones hay una sucesión creciente, cuyos primeros términos son*

$$2, 6, 12, 20, 32, 52, 92, 156, 244, 360, 524 \dots,$$

tal que para cada L en $\{K+3, K+4, \dots, 2K+1\}$, $P(K, L)$ es el $(2K+2-L)$ -ésimo término de la sucesión.

Nosotros observamos los siguientes patrones en las entradas $P(K, L)$ de estas tablas, y tablas análogas que computamos para otras superficies con frontera.

Conjetura 2. *Para todas las superficies con frontera*

- (1) *Si dos celdas en la misma fila tienen una entrada positiva, todas las celdas en medio en esa misma fila también tienen entradas positivas.*
- (2) *La sucesión $\{a_K\}$ definida por*

$$a_K = \min\{WL(w) : SI(w) = K\}$$

es creciente.

El siguiente resultado fue demostrado recientemente by Erlandsson [?]

Teorema 5.4. *Denote por g y b el género y el número de componentes de frontera de una superficie con característica de Euler negativa, respectivamente. Para cada K , la sucesión $P(K, L)/L^{6g+2b-6}$ converge a un número positivo c_K cuando L tiende a infinito. (Ver Figura 13 para una ilustración de este teorema).*

No es difícil ver que (1) implica (2) en la Conjetura 2. Compárese la Conjetura 2 con [22].

También hemos calculado tablas de longitud de palabra/auto-intersección para otras superficies con frontera. Estos experimentos no sugerían polinomios precisos como en el Teorema 5.3, pero nos llevan a la siguiente conjetura (ver [10, Conjetura 1.10]).



FIGURA 13. A la izquierda: En la fila L , columna K , está el número de clases de homotopía libre de curvas cerradas en el toro con una punción que tienen longitud de palabra igual a L y auto-intersección K , todos estos números divididos por L^2 . A la derecha: La función $K \mapsto P(K, 21)$ para $K \in \{0, 1, \dots, 15\}$.

Conjetura 3. *Considere una superficie Σ con frontera y característica de Euler χ negativa. Denote por $SI_{\max}(L)$ el máximo número de auto-intersección para todas las clases de homotopía libre de curvas cerradas en Σ de longitud de palabra a lo sumo L . Entonces*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{SI_{\max}(L)}{L^2} = \frac{\chi}{2\chi - 1}.$$

Observación 5.5. Considere un representante de una clase con longitud de palabra L que pueda ser descompuesto como una unión de L segmentos rectos en el polígono obtenido al remover de la superficie el arco elegido en la Subsección 2.1. Dado que las líneas se intersectan en a lo sumo un punto, el máximo número de puntos de auto-intersección es menor o igual a $\binom{L}{2} = \frac{L(L-1)}{2}$. Por otro lado, cuando la característica de Euler va al infinito, $\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{SI_{\max}(L)}{L^2} = \frac{\chi}{2\chi - 1}$ en la Conjetura 3 tiende a $\frac{1}{2}$. Ésta es una verificación de consistencia.

6. CRECIMIENTO DEL NÚMERO DE GEODÉSICAS CON UNA AUTO-INTERSECCIÓN DADA

Sabemos por el Teorema 3.5 que el crecimiento del número de geodésicas de hasta longitud L es exponencial en L . En esta sección partiremos estos conjuntos de geodésicas de acuerdo al número de auto-intersección.

6.1. Crecimiento del número de geodésicas simples. Para cada entero no-negativo K , denote por $\mathcal{C}_{\Sigma}(L, K)$ al cardinal del conjunto de geodésicas en Σ con número de auto-intersección K y longitud geométrica a lo sumo L .

Por mucho tiempo, muchos investigadores intentaron determinar el crecimiento de $\mathcal{C}_{\Sigma}(L, 0)$. En 1985, Birman y Series [5] probaron que la unión de todas las geodésicas cerradas forma un conjunto muy “delgado”.

Teorema 6.1. *Para cada entero no-negativo k , el conjunto S_k de puntos en una superficie hiperbólica que yacen en una geodésica completa con número de auto-intersección a lo sumo k es nunca denso y tiene dimensión de Hausdorff uno.*

Para curvas simples, el Teorema 6.1 fue observado por primera vez por Bill Thurston a mediados de los años setenta.

Birman y Series afirmaron que el número de geodésicas simples de longitud a lo sumo L está acotado por un polinomio de grado $6g + 2b - 6$, donde g y b son el género y el número de componentes de frontera de la superficie respectivamente.

En 2001, Rivin [25] probó lo siguiente:

Teorema 6.2. *Sea Σ una superficie hiperbólica con género g , b componentes de frontera y c cuernos. Entonces existen constantes $c(\Sigma)$ y $d(\Sigma)$ tales que*

$$c(\Sigma) \cdot L^{6g+2b+2c-6} \leq \mathcal{C}_\Sigma(L, 0) \leq d(\Sigma) \cdot L^{6g+2b+2c-6}.$$

En su tesis doctoral [21] (ver también [22]), Mirzakhani probó lo siguiente:

Teorema 6.3. *Sea $\mathcal{M}_{g,n}$ el espacio moduli de superficies de Riemann hiperbólicas de género g con n cuernos. Entonces*

$$\mathcal{C}_\Sigma(L, 0) \sim c(\Sigma)L^{6g+2n-6}$$

donde $c: \mathcal{M}_{g,n} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y propia. (Recuerde que \sim quiere decir asintótico).

Mirzakhani también calculó el primer coeficiente.

El Teorema 6.3 es parte del trabajo por el que Mirzakhani recibió la Medalla Fields. Otra parte se ocupa de flujos en espacios de Teichmüller de todas las superficies hiperbólicas con una topología fija, ver por ejemplo [1].

Ejemplo 3. Ilustramos el Teorema 6.3 como sigue. En el toro rectangular (14, 16) descrito en el Apéndice A.2 consideramos el conjunto de todas las geodésicas con longitud geométrica hasta 280 como en el Ejemplo 1. De este conjunto seleccionamos, usando el algoritmo descrito en la Subsección 4.1, todas las geodésicas simples cerradas y calculamos la longitud geométrica de cada una de ellas. En esta métrica hay 225 geodésicas simples con longitud hasta 280. Ordenamos las longitudes de estas 225 geodésicas de mayor a menor: $\{l_1, l_2, \dots, l_{225}\}$.

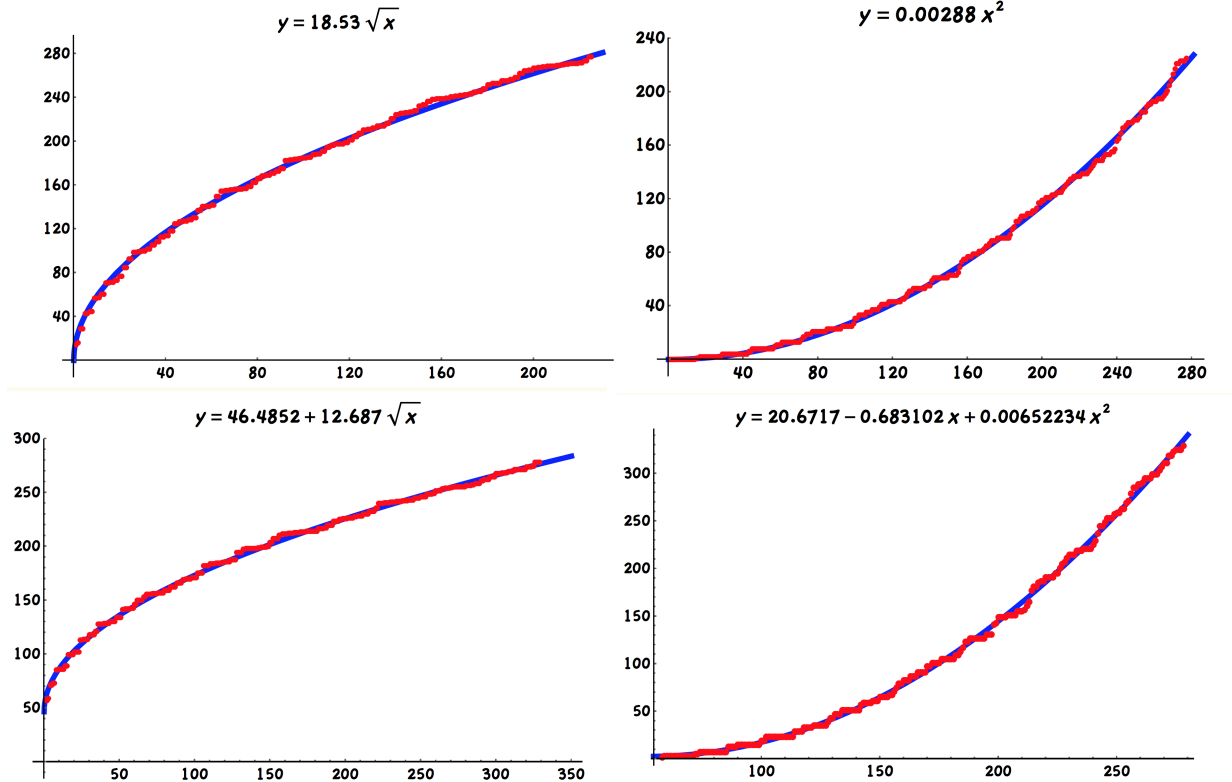


FIGURA 14. Arriba a la izquierda: los puntos de la forma (i, l_i) del Ejemplo 3 y la gráfica de la función $g(x) = 18.53\sqrt{x}$. Arriba a la derecha: los puntos de la forma $(n, \mathcal{C}_\Sigma(n, 0))$ y la función $f(x) = 0.0028x^2$. Abajo a la izquierda: los puntos de la forma (i, l_i) del Ejemplo 4 y la gráfica de la función $g(x) = 46.4852 + 12.687\sqrt{x}$. Abajo a la derecha: los puntos de la forma $(n, \mathcal{C}_\Sigma(n, 1))$ y la función $f(x) = 20.6717 - 0.683102x + 0.00652234x^2$.

En la Figura 14 graficamos los puntos de la forma (i, l_i) para cada i en $\{1, 2, \dots, 225\}$.

Definamos la función $F(L) = \mathcal{C}_\Sigma(L, 0)$, esto es, $F(L)$ es el número de geodésicas simples en nuestro toro hiperbólico con longitud a lo sumo L .

Por el Teorema de Mirzakhani 6.3, esta función es asintótica a $c(\Sigma)L^2$. Si “pretendemos” que $F(L) = c(\Sigma)L^2$, entonces $F^{-1}(i) = l_i$, dado que i es el número de geodésicas simples de longitud a lo sumo l_i . Luego el conjunto de puntos de la forma (i, l_i) puede ser aproximado por una función $g(x) = d \cdot \sqrt{x}$ para alguna constante d . Aproximamos esta constante por mínimos cuadrados y obtuvimos un valor de 18.53. La función $g(x) = 18.53\sqrt{x}$ junto con los puntos está graficada en la Figura 14.

Observe que el resultado de Mirzakhani es asintótico, así que no es un “hecho” que siempre se pueda obtener una buena aproximación como la que mostramos en la Figura 14.

Observación 6.4. El espacio de pantalones tiene un número finito de geodésicas con cada auto-intersección fija. Por lo tanto, un análisis similar al del Ejemplo 3 no dará resultados interesantes.

6.2. Crecimiento del número de geodésicas con auto-intersección mayor que cero. Usando el enfoque de Mirzakhani, Rivin [26] probó:

Teorema 6.5. *Existe una constante $c(\Sigma)$ dependiente de la estructura hiperbólica en Σ tal que:*

$$\mathcal{C}_\Sigma(L, 1) \sim c(\Sigma)L^{6g+2n-6}.$$

Ejemplo 4. Nosotros repetimos los cálculos que hicimos en el Ejemplo 3, pero ahora considerando geodésicas con auto-intersección uno. Hay 329 geodésicas con auto-intersección uno y longitud menor a 280, ver la Figura 14. También repetimos los cálculos que hicimos en el Ejemplo 3 considerando geodésicas con número de auto-intersección 10, 20, 30, 40, 50, 60 y 70. Los resultados se muestran en la Figura 15. Observe que en esa figura, la escala del eje x varía considerablemente, dado que el número de geodésicas con un número de intersección fijo y hasta una cierta longitud, también varía considerablemente (compare con la Subsección 8.2). Más aún, por el Teorema 7.5, una geodésica con número de auto-intersección “grande”, digamos 70, tiene que ser “suficientemente larga”. En nuestro ejemplo, hay alrededor de 600 geodésicas cerradas con número de auto-intersección 70 y longitud geométrica a lo sumo 280. La más corta tiene longitud 279.227 aproximadamente.

Los resultados anteriores, así como también los experimentos computacionales, sugieren que el crecimiento del número de geodésicas de una auto-intersección dada es el mismo que el crecimiento de las geodésicas (pero el primer coeficiente es distinto). Este resultado fue probado recientemente (ver [?], [?]).

Fije una superficie hiperbólica Σ y denote por $G(K, L)$ el número de geodésicas cerradas con número de auto-intersección K y longitud geométrica a lo sumo L .

Teorema 6.6. *Para cada superficie hiperbólica de género g con b componentes de frontera geodésicas y p punciones, y para cada K , la sucesión $G(K, L)/L^{6g+2b+2p-6}$ converge a un número positivo d_K cuando L tiende al infinito.*

Conjetura 4. *La sucesión $\{d_K\}$ en el Teorema 6.6 crece exponencialmente con K .*

Observación 6.7. Suponiendo que las gráficas de la Figura 15 tienen la forma $y = c\sqrt{x} + d$, entonces c puede ser estimado como $2\sqrt{x_0}$ donde x_0 es la coordenada x y la pendiente varía de $+\infty$ a 0 (digamos que es 1). Después de x_0 la gráfica luce como una línea horizontal en este re-escalamiento.

7. RELACIONES ENTRE LA LONGITUD GEOMÉTRICA Y EL NÚMERO DE AUTO-INTERSECCIÓN

Recordemos que por los Teoremas 3.5 y 3.6, el crecimiento del número de geodésicas cerradas en una superficie hiperbólica según la longitud geométrica L es exponencial en L . Por otro lado,

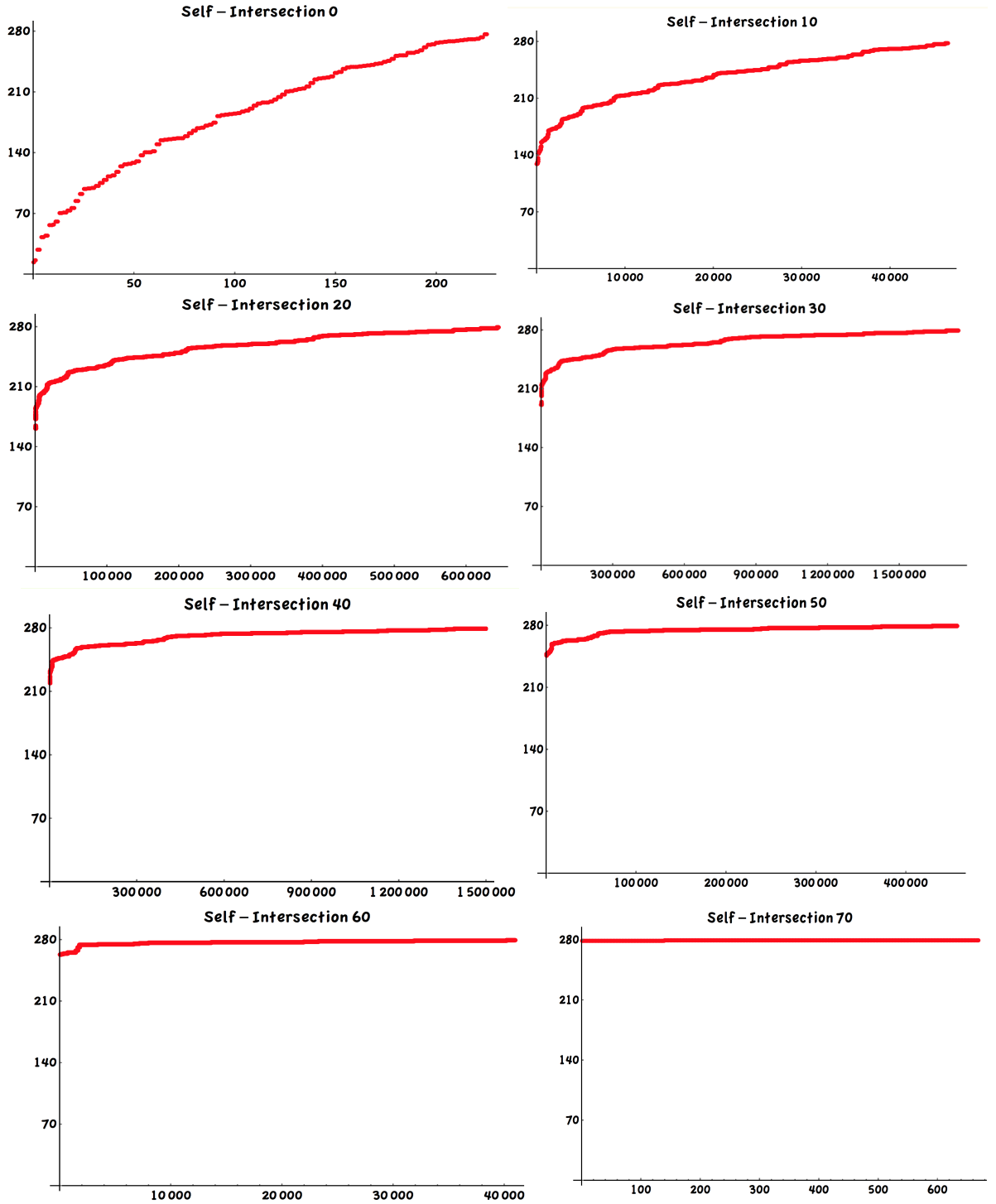


FIGURA 15. Para cada $s \in \{0, 10, \dots, 70\}$, ordenamos (de menor al mayor) las longitudes de las $n(s)$ geodésicas con auto-intersección s y longitud geométrica a lo sumo 280, $\{l_1, l_2, \dots, l_{n(s)}\}$, y graficamos los puntos de la forma (i, l_i) .

el crecimiento del número de geodésicas simples en superficies hiperbólicas según la longitud L es polinomial en L , en virtud del Teorema 6.3. En el espacio de pantalones hay solamente tres geodésicas simples no orientadas (el polinomio correspondiente tiene grado cero). Para todo el resto de las superficies hiperbólicas, el polinomio tiene grado positivo. Así, en estos casos no hay una cota superior en la longitud de geodésicas simples. La Conjetura 4 afirma que un resultado análogo es cierto para geodésicas con un número de auto-intersección fijo. En esta sección exploraremos cotas inferiores para la longitud geométrica de geodésicas con una auto-intersección dada. En líneas generales, una geodésica debe ser “larga” para tener un

número grande de auto-intersecciones. Más aún, Basmajian [3] probó que el número de auto-intersecciones de una geodésica cerrada es acotado por un múltiplo constante del cuadrado de la longitud hiperbólica. Compárese con el Teorema 5.3 y la Conjetura 3.

Teorema 7.1. *Si Σ es una superficie hiperbólica con frontera geodésica (posiblemente vacía) entonces existe una constante $d(\Sigma)$, dependiente de la métrica hiperbólica en Σ , de manera tal que $SI(w) \leq d(\Sigma) WL(w)^2$, donde $d(\Sigma)$ es una función continua de Σ .*

Ejemplo 5. Para ilustrar el Teorema 7.1, hemos calculado las tablas mostradas en la Figura 16, donde se toman algunas longitudes geométricas L y se calcula el máximo de $SI(w)/GL(w)^2$ para todo w tal que $GL(w) < L$. Si Σ es el espacio de pantalones hiperbólico (2.5, 2.6, 5) como en la Definición A.4 entonces $d(\Sigma)$ es aproximadamente 0.025, y en el caso del toro rectangular (14, 16) (Definición A.7), la constante es aproximadamente 0.0009.

Pants 2.5, 2.6, 5		Rectangular torus 14-16	
up to GL	Max(SI(w)/GL(w) ²)	up to GL	Max(SI(w)/GL(w) ²)
22.5	0.024709423	126.0	0.000654914
25	0.024952905	140.0	0.000696838
27.5	0.024952905	154.0	0.000738147
30	0.024952905	168.0	0.000769400
32.5	0.025073507	182.0	0.000795936
35	0.025073507	196.0	0.000820391
37.5	0.025073507	210.0	0.000838317
40	0.025073507	224.0	0.000858166
42.5	0.025073507	238.0	0.000870696
45	0.025073507	252.0	0.000887266

FIGURA 16. Estimación de la constante $d(\Sigma)$ del Teorema 7.1

7.1. Cotas inferiores para la longitud de la geodésica más corta con una auto-intersección dada. Una geodésica (en cualquier superficie hiperbólica, posiblemente con puncciones y frontera geodésica) con longitud menor a $4 \log(1 + \sqrt{2})$ es simple, [15, 24, 30, 31]. En [2] y [3] Basmajian probó la siguiente generalización:

Teorema 7.2. *Para todas las superficies hiperbólicas compactas con frontera geodésica y un número finito de cuernos, existe una sucesión de constantes que tienden al infinito cuando k lo hace, tales que si una geodésica en w tiene longitud geométrica menor que M_k entonces $SI(w) < k$.*

Basmajian extendió estos resultados en [3], mostrando que estas constantes son óptimas en el siguiente sentido:

Teorema 7.3. *Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe una superficie hiperbólica y una geodésica en dicha superficie con número de auto-intersección k y longitud geométrica M_k . Más aún,*

$$\frac{\log(2k)}{4} \leq M_k \leq 2 \cosh^{-1}(2k + 1).$$

Como un corolario, Basmajian afirmó:

Teorema 7.4. *Si w es una geodésica cerrada en una superficie hiperbólica (posiblemente con punciones y frontera geodésica) que satisface $GL(w) \leq \frac{\log(2k)}{4}$, entonces el número de auto-intersección de w es a lo sumo $k - 1$.*

Basmajian se preguntó si lo siguiente es verdadero.

Conjetura 5. *La sucesión $\{M_k\}$ es creciente.*

Note que las constantes M_k son universales en el sentido en que sirven para cualquier superficie hiperbólica (posiblemente con punciones y frontera geodésica). Pueden hacerse preguntas similares para una superficie hiperbólica fija: considere la sucesión $\{s_k\}_{k \geq 0}$, donde s_k es la longitud geométrica de la geodésica más corta con número de auto-intersección k . No es difícil probar que $s_0 < s_k$ para todo $k > 0$. Buser [6, Teorema 4.2.4] probó que en una superficie hiperbólica cerrada, $s_1 < s_k$ para todo $k > 2$.

Basmajian probó:

Teorema 7.5. *Sea Σ una superficie hiperbólica.*

(1) *Sea Σ una superficie compacta con frontera geodésica (posiblemente vacía). Denote por $L(\Sigma)$ a la longitud de la geodésica con una sola auto-intersección en Σ . Entonces existe una constante $c(\Sigma)$ tal que*

$$c(\Sigma)\sqrt{k} \leq s_k \leq 3L(\Sigma) \left(\sqrt{k} + 1 \right).$$

Más aún, la constante $d(\Sigma)$ del Teorema 7.1 satisface $d(\Sigma) = 1/c(\Sigma)^2$.

(2) *Si Σ tiene al menos un cuerno y no es el disco con una punción, entonces para $k = 2, 3, \dots$ se tiene*

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{k}{2} \right) \leq s_k(\Sigma) \leq 2 \sinh^{-1}(k) + d(\Sigma) + 1,$$

donde $d(\Sigma)$ es la distancia ortogonal más corta desde la frontera de longitud uno de un cuerno en Σ a sí misma.

Conjetura 6. *La sucesión $\{s_k\}$ es creciente. Más aún, para cada superficie hiperbólica Σ de género g y b componentes (geodésicas) de frontera, existe una constante $u(\Sigma)$ (dependiente de la métrica) tal que la sucesión $\{s_k - u(\Sigma)\sqrt{k}\}$ es acotada.*

Adicionalmente, en el caso del espacio de pantalones la sucesión $\{s_k - u(\Sigma)\sqrt{k}\}$ tiende a cero cuando k tiende al infinito, y en las demás superficies hiperbólicas la sucesión tiende a una constante positiva.

Observe que la Conjetura 2(1) es la versión combinatoria de la Conjetura 6.

Nuestra evidencia computacional apoya la Conjetura 6. Intentamos con varias métricas distintas en el espacio de pantalones y varias métricas distintas en el toro rectangular con una componente de frontera descrito en la Subsección A.2.

Ejemplo 6. La longitud de la geodésica más corta con una auto-intersección en el toro rectangular (14, 16) (Definición A.7), $L(\Sigma)$, es aproximadamente 57.2274. En el Ejemplo 5 estimamos que la constante $d(\Sigma)$ es aproximadamente 0.0009. Por el Teorema 7.5, $c(\Sigma)$ es aproximadamente 33.33:

$$33.33\sqrt{k} \leq s_k \leq 171.6822(\sqrt{k} + 1).$$

En el espacio de pantalones (2.5, 2.6, 5), $d(\Sigma)$ es aproximadamente 0.025. Luego $c(\Sigma)$ es alrededor de 6.32. La longitud $L(\Sigma)$ de la geodésica más corta con una auto-intersección es 6.6:

$$6.32\sqrt{k} \leq s_k \leq 19.8(\sqrt{k} + 1).$$

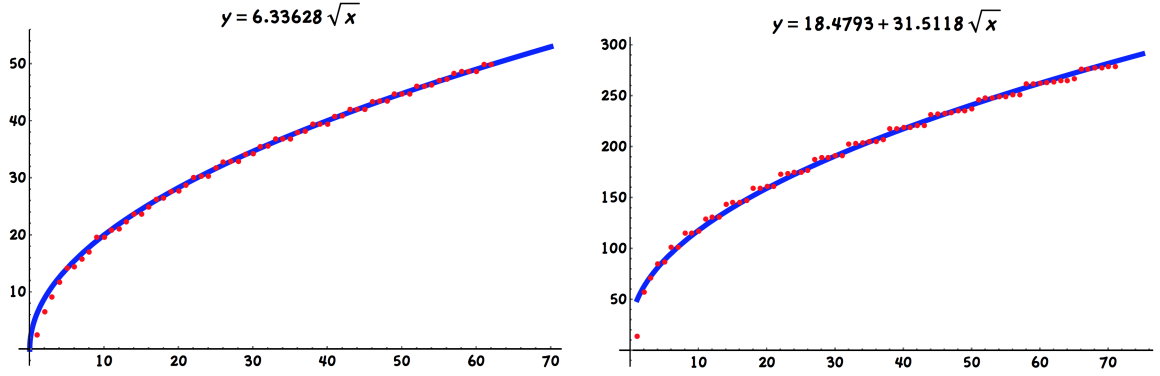


FIGURA 17. Dos gráficas de la sucesión $\{s_k\}$ de la Conjetura 6 (como una función de k) para el espacio de pantalones $(2.5, 2.6, 5)$ (izquierda), y para un toro rectangular $(14, 16)$ (derecha).

8. ESTADÍSTICAS QUE RELACIONAN LONGITUD GEOMÉTRICA, LONGITUD DE PALABRA Y AUTO-INTERSECCIÓN

8.1. Muestreo de auto-intersección por longitud de palabra. La Figura 18 muestra el histograma de todas las clases de homotopía libre que no son potencias en el toro con una punción, con longitud de palabra $4, 6, 8, \dots, 20$, organizadas por auto-intersección. Los histogramas se representan a escala. Éstos sugieren que la distribución del muestreo de auto-intersección por longitud de palabra (apropiadamente normalizado) converge a una Gaussiana cuando la longitud de palabra tiende a infinito. Probamos este resultado en conjunto con Steve Lalley [8]:

Teorema A. *En una superficie con frontera no vacía y característica de Euler χ , la proporción de palabras w con longitud de palabra L tales que*

$$a < \frac{\text{SI}(w) - \kappa \cdot L^2}{\sigma L^{3/2}} < b$$

converge cuando L tiende al infinito a $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, donde

$$\kappa = \frac{\chi}{3(2\chi - 1)} \text{ y } \sigma^2 = \frac{2\chi(2\chi^2 - 2\chi + 1)}{45(2\chi - 1)^2(\chi - 1)}.$$

En otras palabras, cuando L es muy grande, la distribución de la auto-intersección de todas las clases de homotopía libre de longitud de palabra L se acerca a una Gaussiana con media $\kappa \cdot L^2$ y desviación estándar $\sigma \cdot L^{3/2}$.

Observación 8.1. Note que con longitud de palabra tan pequeña como 20 obtenemos un histograma que luce fuertemente como una Gaussiana. Desde luego, la población en este caso es extremadamente grande.

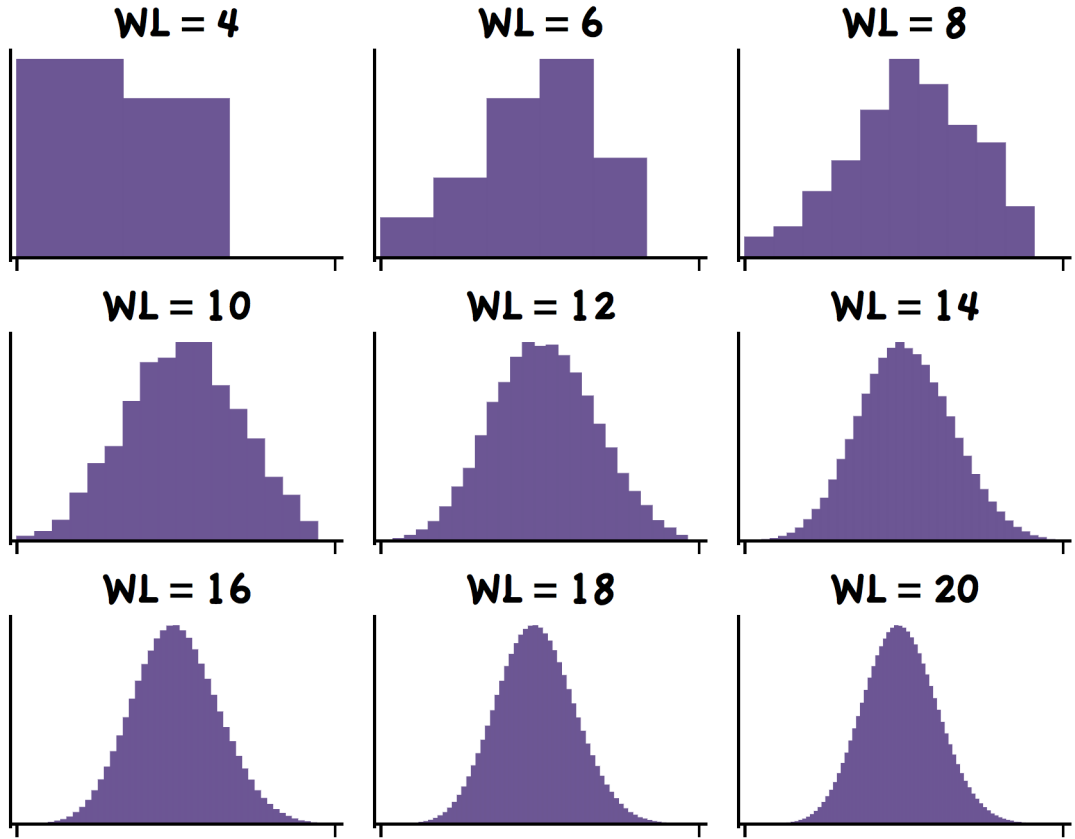


FIGURA 18. Histogramas de clases de homotopía libre de curvas cerradas en el toro punción con diferentes longitudes de palabra fija, organizadas por auto-intersección.

Observación 8.2. El valor esperado de la intersección de n cuerdas aleatorias en un círculo es $\frac{n(n-1)}{6}$ y la varianza es $\frac{n(n-1)(n+3)}{45}$, [28, Capítulo 6] (aquí una cuerda aleatoria es determinada por dos puntos colocados en la circunferencia de forma independiente y aleatoria, con distribución uniforme). Compare con lo anterior: cuando la característica de Euler χ es muy grande, la media de las auto-intersecciones de todas las clases con longitud de palabra L es cercana a $\frac{L^2}{6}$ cuando L es grande, y la varianza es cercana a $\frac{L^3}{45}$.

Observación 8.3. En el caso del espacio de pantalones y el toro con una componente de frontera, la media de la auto-intersección de todas las clases con longitud de palabra L es aproximadamente $\frac{L^2}{9}$ para L grande, mientras que la auto-intersección máxima es aproximadamente $\frac{L^2}{4}$.

8.2. Muestreo de auto-intersección por longitud geométrica. Lalley [18] y [19] probó

Teorema 8.4. (1) Si Σ es una superficie cerrada de género $g \geq 2$ y curvatura constante negativa c , entonces para L grande la “mayoría” de las geodésicas cerradas de longitud geométrica a lo sumo L tienen auto-intersección próxima a $\frac{c}{2\pi(g-1)}L^2$.

(2) Sea Σ una superficie hiperbólica cerrada. Denote por w_L una geodésica cerrada aleatoria elegida de entre todas las geodésicas con longitud geométrica a lo sumo L . Entonces para alguna distribución de probabilidad Φ y alguna constante $\kappa = \kappa(\Sigma)$, $\frac{SI(w_L) - \kappa L^2}{L}$ converge en distribución a Φ .

(3) Si Σ es una superficie cerrada con curvatura variable negativa, entonces para algunas constantes $\kappa' = \kappa'(\Sigma)$ y σ , $\frac{SI(w_L) - \kappa' L^2}{\sigma L^{3/2}}$ converge en distribución a la distribución Gaussiana unitaria estándar.

Nuestros experimentos indican que para superficies con frontera geodésica, un resultado análogo al Teorema 1.1 (muestreando por longitud de palabra) y el Teorema de Lalley 8.4



FIGURA 19. A la izquierda, histograma de la auto-intersección de todas las geodésicas de longitud geométrica hasta 280 en el toro rectangular hiperbólico (14,16). A la derecha, histograma del número de auto-intersección de todas las geodésicas de longitud hasta 38 en el espacio de pantalones hiperbólico (2.5, 2.6, 5).

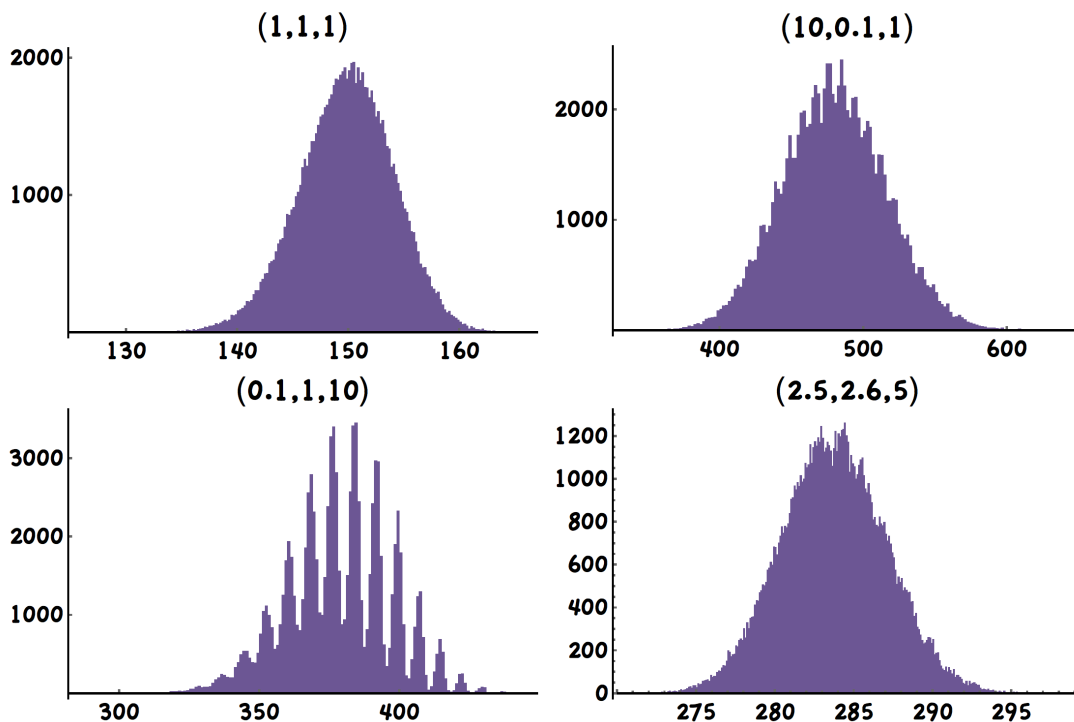


FIGURA 20. Histogramas de la longitud geométrica de una muestra de 100,000 palabras con longitud de palabra 100 en diferentes espacios de pantalones hiperbólicos. Los parámetros (A, B, C) de la longitud de las componentes de frontera se indican en cada gráfica.

para curva variable (muestreando por longitud geométrica) es cierto. La Figura 19 exhibe el resultado de algunos de nuestros experimentos.

Conjetura 7. *Para una superficie hiperbólica con frontera geodésica, la distribución del muestreo de auto-intersección por longitud geométrica (apropiadamente normalizada) converge (en distribución) a una Gaussiana cuando la longitud tiende a infinito.*

8.3. Muestreo de longitud geométrica por longitud de palabra. En [9] conjeturamos que la longitud geométrica, muestrada por longitud de palabra, se aproxima a una Gaussiana

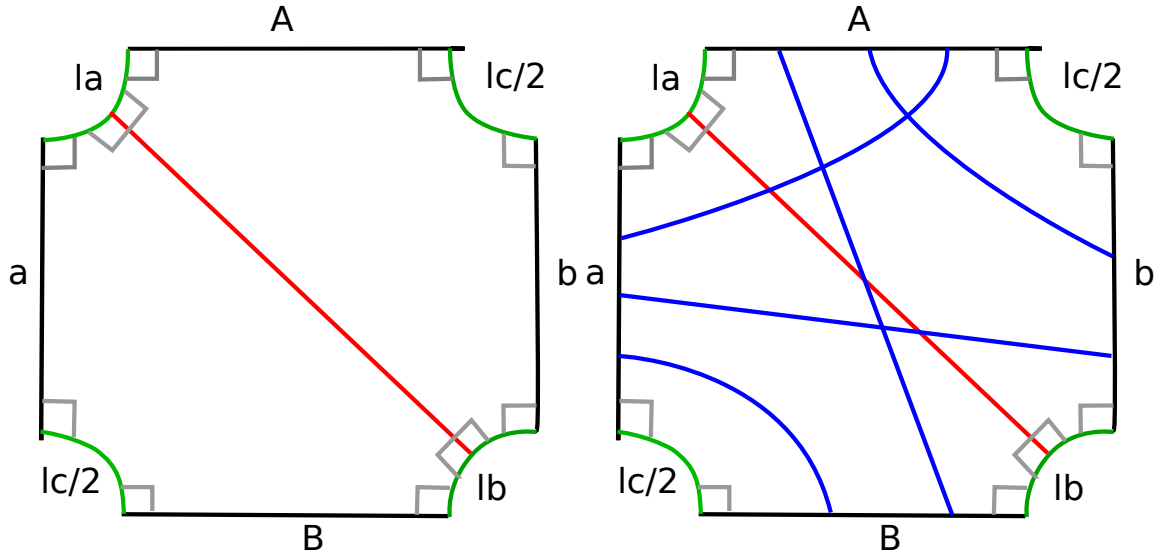


FIGURA 21. El octágono obtenido “cortando” un espacio de pantalones hiperbólico a la izquierda, y un representante de la curva $aaBab$ a la derecha.

cuando la longitud de palabra tiende al infinito, ver Figura 20. Recíprocamente, los cálculos también sugieren que la distribución de la longitud de palabra muestreada por longitud geométrica tiende a una Gaussiana cuando la longitud geométrica tiende al infinito.

APÉNDICE A. CÓMO MUESTREAMOS POR LONGITUD GEOMÉTRICA

A.1. El espacio de pantalones. Por [6, Teorema 2.4.2], dados tres números reales positivos α, β y γ , existe una única tripleta de números u, v y w y un único polígono hiperbólico convexo de ángulos rectos, tal que las longitudes de sus lados son $\alpha, u, \beta, v, \gamma, w$ tomadas en orden cíclico.

Dados tres números reales positivos la, lb y lc , sean $\alpha = la/2$, $\beta = lb/2$ y $\gamma = lc/2$, y considere dos hexágonos congruentes con longitudes de lados alternantes α, β y γ . Pegando los lados obvios se obtiene un espacio de pantalones hiperbólico con frontera geodésica, tal que las componentes de frontera tiene longitudes la, lb and lc , Figura 21.

Proposición A.1. Sea $C = \min\{la, lb, lc/2\}$. Para cada geodésica w en el espacio de pantalones con componentes de frontera de longitudes la, lb, lc ,

$$GL(w) \geq C \cdot WL(w),$$

donde la longitud de palabra es calculada en el alfabeto a, b .

Demostración. Una geodésica cerrada w puede ser descompuesta como la unión de segmentos geodésicos con extremos en las aristas etiquetadas a, A, b y B .

Afirmamos que cada uno de estos segmentos tiene longitud mayor a C . Al tener ésto, el resultado se sigue.

Probaremos esta afirmación en el caso de la geodésica $aaBab$ representada en la Figura 21.

Considere el segmento desde la arista B , a la arista a . Este segmento está en el lado superior de un cuadrilátero con dos ángulos rectos en la base. Por lo tanto es más largo que la base, que tiene longitud $lc/2$.

Ahora bien, consideremos el segmento de la arista A a la arista B . Este segmento es la unión del segmento x_1 desde la arista A al segmento de la a lb (en rojo en la Figura 21), y el segmento x_2 desde el segmento de la a lb a la arista B .

Análogamente a la manera en que se hizo anteriormente, x_1 tiene longitud mayor que $la/2$ y x_2 tiene longitud mayor a x_2 . La prueba de la afirmación para los otros segmentos, y para el caso general, puede completarse siguiendo las mismas ideas. \square

Corolario A.2. *En el espacio de pantalones con componentes de frontera de longitud la, lb, lc ,*

$$\{w \in \pi_0 : \text{GL}(w) \leq L\} \subset \{w \in \pi_0 : \text{WL}(w) \leq C \cdot L\},$$

donde $C = \min\{la, lb, lc/2\}$ y la longitud de palabra es calculada en el alfabeto a, b .

Observación A.3. La constante $\min\{la, lb, lc/2\}$ es óptima ya que $\text{GL}(a) = la$, $\text{GL}(b) = lb$ y $\text{GL}(ab) = lc$.

Definición A.4. Un *espacio de pantalones* (la, lb, lc) es un espacio de pantalones con una métrica hiperbólica y componentes de frontera geodésica con longitudes la, lb y lc .

Ahora describiremos la métrica del espacio de pantalones particular que discutimos en este trabajo. Para más detalles ver [9].

Sean

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cosh(\frac{la}{2}) & \cosh(\frac{la}{2}) - 1 \\ \cosh(\frac{la}{2}) + 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \beta = \begin{pmatrix} \cosh(\frac{lb}{2}) & \Delta \\ \sinh^2(\frac{lb}{2})/\Delta & \cosh(\frac{lb}{2}) \end{pmatrix}$$

donde $\Delta = -\frac{\cosh(\frac{la}{2}) \cdot \cosh(\frac{lb}{2}) + \cosh(\frac{lc}{2}) + \sqrt{\frac{1}{2}(4 \cosh(\frac{la}{2}) \cosh(\frac{lb}{2}) \cosh(\frac{lc}{2}) + \cosh(la) + \cosh(lb) + \cosh(lc) + 1)}}{\cosh(\frac{la}{2}) + 1}$.

Las matrices α y β generan un subgrupo discreto cocompacto G de $PSL(2, \mathbb{R})$. Recuerde que una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa en el semi-plano superior \mathbb{H} por $z \mapsto \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$. El cociente de \mathbb{H} por G es nuestro espacio de pantalones. El octágono hiperbólico con ángulos rectos de la Figura 21 es un dominio fundamental de la acción de G en \mathbb{H} . La aplicación cociente $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/G$ es un recubrimiento y la acción de G en \mathbb{H} está dada por las transformaciones deck.

Dada una palabra cíclica reducida w en los generadores a, b del grupo fundamental del espacio de pantalones (y sus inversos), si se reemplaza cada ocurrencia de a por la matriz α , a^{-1} por la matriz α^{-1} y similarmente con b y β , se obtiene una matriz g . La longitud de la geodésica cerrada en w satisface:

$$\cosh\left(\frac{\text{GL}(w)}{2}\right) = \frac{|\text{tr}(g)|}{2}.$$

Así, puede programarse la computadora para encontrar la longitud de todas las geodésicas cerradas usando las matrices α y β . En el ejemplo del espacio de pantalones (2.5, 2.6, 5) las matrices son (aproximadamente)

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1.888 & 0.888 \\ 2.888 & 1.888 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1.970 & -6.690 \\ -0.431 & 1.970 \end{pmatrix}$$

Para estudiar todas las geodésicas de longitud geométrica hasta 50 en el espacio de pantalones (2.5, 2.6, 5), hacemos que nuestro programa calcule la longitud geométrica de todas las palabras cíclicas reducidas con longitud de palabra menor o igual a 20, y elegimos de este conjunto aquellas con longitud geométrica de a lo sumo 50. Por el Corolario A.2, ésto basta.

A.2. El toro con una componente de frontera. En esta subsección describimos una métrica en el toro con una componente de frontera geodésica debida a Bernard Maskit, que satisface un enunciado similar a la Proposición A.1. Ésto nos permitirá estudiar todas las geodésicas hasta una longitud dada.

Fijemos dos números positivos la y lb tales que $\sinh la \cdot \sinh lb > 1$. Consideremos dos segmentos geodésicos perpendiculares con longitud $la/2$ y $lb/2$. Lance perpendiculares a cada uno de estos segmentos desde el extremo que los segmentos no tienen en común. Por [6, Lema 2.3.5], estas dos líneas son disjuntas, y más aún, tienen una perpendicular común. Por ende, se obtiene

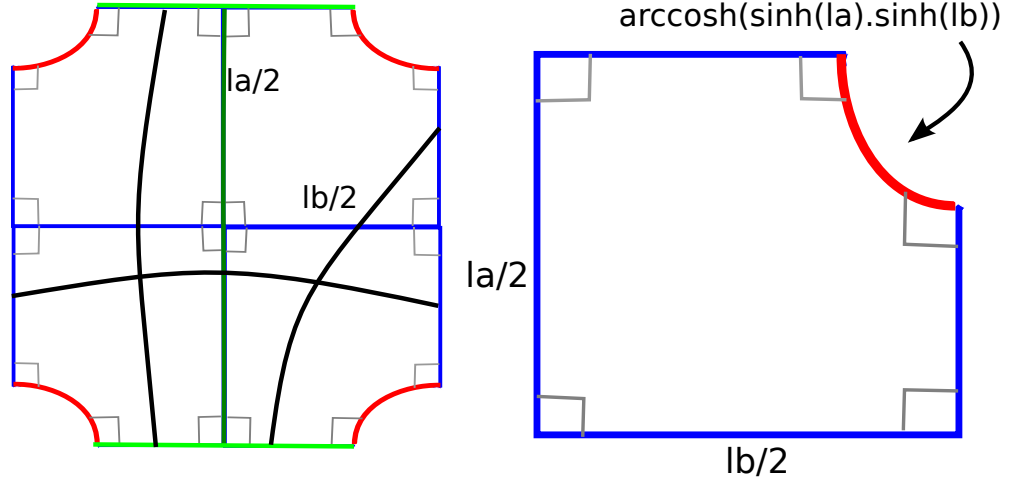


FIGURA 22. Izquierda: Arcos de geodésicas en un “toro rectangular”. Derecha: Uno de los cuatro pentágonos de ángulos rectos que forman un toro rectangular.

un pentágono con ángulos rectos como en la Figura 22 (derecha). Pegando los pares apropiados de aristas congruentes de cuatro de estos pentágonos obtenemos el toro hiperbólico con frontera geodésica.

Usando el mismo tipo de ideas de la prueba de la Proposición 21, y el hecho [6, Lema 2.3.5] de que la longitud del lado del pentágono de ángulos rectos es $\text{arccosh}(\sinh la \sinh lb)$ puede probarse:

Proposición A.5. *Para cada geodésica w en el toro de Maskit con una componente de frontera y generadores de longitud la, lb ,*

$$\text{GL}(w) \geq C \cdot \text{WL}(w),$$

donde $C = \min\{la, lb, lc\}$ y $\cosh lc = \sinh la \cdot \sinh lb$. La longitud de palabra es calculada en el alfabeto a, b . Por lo tanto,

$$\{w \in \pi_0 : \text{GL}(w) \leq L\} \subset \{w \in \pi_0 : \text{WL}(w) \leq C \cdot L\}.$$

Demostración. Una geodésica con longitud de palabra L puede ser descompuesta en N segmentos que van “paralelos” a uno de los generadores o paralelos a un cuarto de la componente de frontera. Así, cada uno de estos segmentos es al menos $\min\{la, lb, bd/4\}$, donde la y lb denotan las longitudes de los dos generadores respectivamente, y bd denota la longitud de la componente de frontera. \square

Observación A.6. La constante $\min\{la, lb, bd/4\}$ es óptima dado que $\text{GL}(a) = la$, $\text{GL}(b) = lb$ y $\text{GL}(abAB) = lc$.

Definición A.7. Un *toro rectangular* (la, lb) es un toro con una métrica hiperbólica y generadores de longitud la y lb , construido pegando los pares de aristas apropiados de cuatro copias de un pentágono con ángulos rectos como en la Figura 22.

Considere las matrices

$$\alpha = \begin{pmatrix} e^{la} & 0 \\ 0 & e^{-la} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \beta = \begin{pmatrix} \cosh(lb) & -\sinh(lb) \\ -\sinh(lb) & \cosh(lb) \end{pmatrix}.$$

Calculamos las longitudes de geodésicas en el toro rectangular usando las matrices α, β de arriba con $la = 7$ y $lb = 8$, de manera similar a como lo hicimos en el espacio de pantalones.

REFERENCIAS

1. Jayadev Athreya, Alexander Bufetov, Alex Eskin, and Maryam Mirzakhani, *Lattice point asymptotics and volume growth on teichmüller space*, Duke Mathematical Journal **161** (2012), no. 6, 1055–1111.
2. Ara Basmajian, *The stable neighborhood theorem and lengths of closed geodesics*, Proceedings of the American Mathematical Society **119** (1993), no. 1, 217–224.
3. ———, *Universal length bounds for non-simple closed geodesics on hyperbolic surfaces*, Journal of Topology (2013).
4. Joan S. Birman and Caroline Series, *An algorithm for simple curves on surfaces*, J. London Math. Soc. (2) **29** (1984), no. 2, 331–342. MR MR744104 (85m:57002)
5. Joan S Birman and Caroline Series, *Geodesics with bounded intersection number on surfaces are sparsely distributed*, Topology **24** (1985), no. 2, 217–225.
6. Peter Buser, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Springer, 2010.
7. Moira Chas, *Combinatorial Lie bialgebras of curves on surfaces*, Topology **43** (2004), no. 3, 543–568.
8. Moira Chas and Steven P Lalley, *Self-intersections in combinatorial topology: statistical structure*, Inventiones Mathematicae **188** (2012), no. 2, 429 – 463.
9. Moira Chas, Keren Li, and Bernard Maskit, *Experiments suggesting that the distribution of the hyperbolic length of closed geodesics sampling by word length is Gaussian*, To appear in Experimental Mathematics.
10. Moira Chas and Anthony Phillips, *Self-intersection numbers of curves in the doubly-punctured plane*, Experimental Mathematics **21** (2012), no. 1, 26–37.
11. Marshall Cohen and Martin Lustig, *Paths of geodesics and geometric intersection numbers. I*, Combinatorial group theory and topology (Alta, Utah, 1984), Ann. of Math. Stud., vol. 111, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987, pp. 479–500. MR MR895629 (88m:57016)
12. Laurent Guilloupé, *Sur la distribution des longueurs des géodésiques fermées d’une surface compactea bord totalement géodésique*, Floer homology, gauge theory, and low-dimensional topology: Proceedings of the Clay Mathematics Institute 2004 Summer School, Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary, June 5-26, 2004 (1986).
13. Joel Hass and Peter Scott, *Intersections of curves on surfaces*, Israel Journal of Mathematics **51** (1985), no. 1, 90–120.
14. ———, *Configurations of curves and geodesics on surfaces*, Geometry and Topology Monographs (1999).
15. John Hempel, *Traces, lengths, and simplicity for loops on surfaces*, Topology and its Applications **18** (1984), no. 2, 153–161.
16. Nigel Hitchin, *Geometry of surfaces*, <https://people.maths.ox.ac.uk/hitchin/>.
17. Victor Kostyuk, *Euler characteristic*, <http://www.math.cornell.edu/~mec/Winter2009/Victor/part5.htm>.
18. Steven P. Lalley, *Renewal theorems in symbolic dynamics, with applications to geodesic flows, noneuclidean tessellations and their fractal limits*, Acta Mathematica **163** (1989), no. 1, 1–55.
19. ———, *Statistical regularities of self-intersection counts for geodesics on negatively curved surfaces*, Duke Mathematical Journal **163** (2014), no. 6, 1191–1261.
20. Martin Lustig, *Paths of geodesics and geometric intersection numbers. II*, Combinatorial group theory and topology (Alta, Utah, 1984), Ann. of Math. Stud., vol. 111, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987, pp. 501–543. MR MR895629 (88m:57016)
21. Maryam Mirzakhani, *Simple geodesics on hyperbolic surfaces and the volume of the moduli space of curves*, Ph.D. thesis, Harvard University, 2004.
22. ———, *Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces*, Ann. of Math. (2) **168** (2008), no. 1, 97–125. MR MR2415399 (2009c:32027)
23. Joaquin Perez Munoz, *Curvas y superficies*, <http://wdb.ugr.es/~jperez/wordpress/wp-content/uploads/raiz2.pdf>.
24. Toshihiro Nakanishi et al., *The lengths of the closed geodesics on a Riemann surface with self-intersections*, Tohoku Mathematical Journal **41** (1989), no. 4, 527–541.
25. Igor Rivin, *Simple curves on surfaces*, Geometriae Dedicata **87** (2001), no. 1, 345–360.
26. ———, *Geodesics with one self-intersection, and other stories*, Advances in Mathematics (2012).
27. Richard Sharp, *Periodic orbits of hyperbolic flows*, On Some Aspects of the Theory of Anosov Systems, Springer Monographs in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2004, pp. 73–138.
28. Herbert Solomon, *Geometric probability*, vol. 28, SIAM, 1978.
29. Dennis Sullivan, *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions*, Publications Mathématiques de l’IHÉS **50** (1979), no. 1, 171–202.
30. Akira Yamada, *On Marden’s universal constant of fuchsian groups*, Kodai Mathematical Journal **4** (1981), no. 2, 266–277.
31. ———, *On Marden’s universal constant of fuchsian groups, II*, Journal d’Analyse Mathématique **41** (1982), no. 1, 234–248.

E-mail address: moira.chas@stonybrook.edu

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, STONY BROOK UNIVERSITY, STONY BROOK, NY, 11794, USA