

EL CORCHETE DE GOLDMAN Y LA INTERSECCIÓN DE CURVAS EN SUPERFICIES

MOIRA CHAS

TRADUCTOR: TOMÁS MEJÍA

RESUMEN. En estas notas discutiremos la estructura del álgebra de Lie de Goldman desde un punto de vista básico, junto con su relación con la estructura de intersección y auto-intersección de curvas en superficies. También haremos una lista de ejemplos y mencionaremos algunos de los problemas abiertos en este área.

Esta álgebra de Lie se define mediante la combinación de dos operaciones bien conocidas entre clases de homotopía de curvas: la intersección transversal y la composición de lazos dirigidos que empiezan y terminan en el mismo punto. Dicha álgebra de Lie resulta ser una herramienta poderosa y su estructura aún posee muchos misterios.

ÍNDICE

1. Introducción	1
2. El \mathbb{Z} -módulo de curvas	2
3. El corchete de Goldman	3
4. Ejemplos	5
5. La relación entre el corchete de dos curvas y el número de puntos de intersección	6
6. Problemas abiertos y generalizaciones	8
6.1. La estructura del álgebra de Lie de Goldman	8
6.2. El álgebra de Lie de Goldman y la intersección de curvas en superficies	9
6.3. Topología de cuerdas	9
Referencias	9

1. INTRODUCCIÓN

En los ochenta, Goldman [10] describió una estructura inesperada de álgebra de Lie definida en las combinaciones lineales de clases de homotopía libre de curvas dirigidas cerradas en una superficie orientable. Esta álgebra de Lie se define mediante la combinación de dos operaciones bien conocidas entre clases de homotopía de curvas: la intersección transversal y la composición de lazos dirigidos que empiezan y terminan en el mismo punto. Dicha álgebra de Lie resulta ser una herramienta poderosa y su estructura aún posee muchos misterios. Ha sido generalizada en direcciones diversas (ver la Sección 6 para un ejemplo), ha propuesto preguntas interesantes (ver Sección 6) y ha motivado un gran volumen de investigación.

2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary 57M99, Secondary 17B65.

Key words and phrases. surfaces, intersection number, curves, Goldman bracket.

Partially supported by NSF grant 1098079-1-58949.

El objetivo de estas notas es discutir esta álgebra de Lie desde un punto de vista elemental, comenzando con una descripción del espacio lineal en el que se define el corchete (Sección 2), seguido por la definición precisa (Sección 3), continuando con ejemplos (Sección 4) y un estudio de la relación ente el corchete y la intersección de curvas (Sección 5), y finalizando con algunos problemas abiertos y desarrollos ulteriores en este área (Sección 6).

2. EL \mathbb{Z} -MÓDULO DE CURVAS

Fijemos una superficie Σ con o sin frontera, posiblemente no compacta. Consideremos dos curvas cerradas orientadas a y b en Σ , es decir, dos aplicaciones a y b del círculo orientado a Σ . Las curvas a y b se dicen *libremente homotópicas* si existe una aplicación F de un cilindro C en Σ tal que la restricción de F a una de las componentes (orientadas) de frontera de C coincide con a , y la restricción a la otra componente coincide con b .

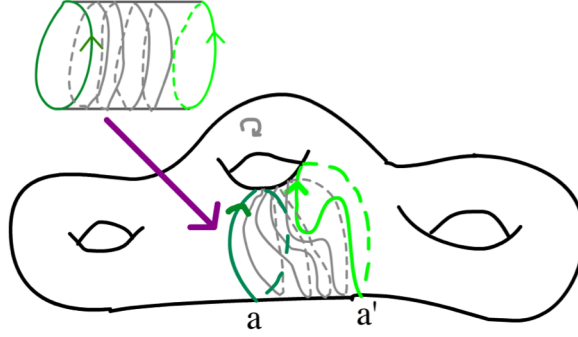


FIGURA 1. Una homotopía (libre) entre las curvas a y a' .

Las letras minúsculas a, b, c, \dots se utilizarán para denotar curvas; las letras mayúsculas A, B, C, \dots denotarán clases de homotopía libre de curvas. La clase del lazo trivial es denotada por \circ . Si x es una curva, $\mathcal{FH}(x)$ denota su clase de homotopía libre y \bar{x} la curva x recorrida en dirección reversa. Además, para cada entero positivo n , x^n es la curva que recorre n veces a x en la misma dirección.

Denotemos por π_0 al **conjunto** de clases de homotopía libre de Σ (ver Comentario 6.5 para una discusión de esta notación). El objetivo de la negrilla en “conjunto” es enfatizar el hecho de que no hay a priori una estructura algebraica obvia en π_0 , en contraste con la célebre estructura que Poincaré encontró para el conjunto de clases de homotopía (basadas) de curvas cerradas en un espacio, el grupo fundamental.

El módulo libre de combinaciones lineales sobre el anillo de los enteros con base π_0 se denota $\mathbb{Z}[\pi_0]$. Luego un elemento de $\mathbb{Z}[\pi_0]$ es una expresión lineal formal en clases de homotopía libre con coeficientes enteros. Un ejemplo de dicha combinación lineal utilizando la notación definida anteriormente es

$$3\mathcal{FH}(a) - \mathcal{FH}(\bar{a}) + \circ + 7B + \mathcal{FH}(a^3).$$

Nótese que la clase del lazo trivial no es cero; en símbolos, $\circ \neq 0$. Además, si a es cualquier curva entonces en general $\mathcal{FH}(\bar{a}) \neq -\mathcal{FH}(a)$ y $\mathcal{FH}(a^3) \neq 3\mathcal{FH}(a)$. Más aún, \circ , $\mathcal{FH}(a)$, $\mathcal{FH}(\bar{a})$ y $\mathcal{FH}(a^3)$ son en general miembros distintos de la base π_0 .

Ejercicio 1. Pruebe que hay una biyección natural entre π_0 y el conjunto de componentes del espacio de aplicaciones del círculo a Σ , con la topología compacto-abierta. (Ésta es la razón por la cual el conjunto de clases de homotopía libre es denotado por π_0).

Ejercicio 2. Sea X un espacio arco-conexo y considere $x_0 \in X$. Pruebe que hay una biyección entre el conjunto de clases de homotopía libre de aplicaciones del círculo orientado a X y el conjunto de clases de conjugación de elementos de $\pi_1(X, x_0)$, el grupo fundamental de X con punto base x_0 . (Pista: Muestre que hay una aplicación de $\pi_1(X, x_0)$ al conjunto de clases de homotopía libre de aplicaciones del círculo a X , la cual es constante en clases de conjugación).

Corolario 2.1. Si Σ es una superficie conexa entonces hay una biyección entre el conjunto de clases de homotopía libre de curvas cerradas dirigidas en Σ y el conjunto de clases de conjugación de $\pi_1(\Sigma, x_0)$.

Si Σ es una superficie orientable con frontera no vacía entonces el grupo fundamental de Σ es libre. Considere un conjunto minimal $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de generadores de este grupo libre. Una *palabra cíclica* es una clase de equivalencia de palabras en $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y sus inversos, relacionadas por una permutación cíclica de sus letras. Una palabra es *reducida* si no contiene la yuxtaposición de un generador y su inversa.

Ejercicio 3. Muestre que hay una correspondencia natural uno-a-uno entre palabras cíclicas reducidas y clases de homotopía libre de curvas en una superficie conexa y orientada Σ con frontera. (La palabra vacía se considera una palabra cíclica reducida y corresponde a la clase de conjugación de la identidad del grupo fundamental).

Por el Ejercicio 3, si Σ es una superficie con frontera, podemos pensar a $\mathbb{Z}[\pi_0]$ como el \mathbb{Z} -módulo libre cuya base consiste de palabras cíclicas reducidas en un conjunto (minimal) de generadores para $\pi_1(\Sigma, x_0)$ y sus inversos.

3. EL CORCHETE DE GOLDMAN

De aquí en adelante asumiremos que la superficie Σ es orientable y ha sido elegida una orientación. Nuestro siguiente propósito es definir un corchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ en $\mathbb{Z}[\pi_0]$. Recordemos que un corchete de Lie es una aplicación bilineal que es anti-simétrica y satisface la identidad de Jacobi en tres términos (es decir, para cada tripleta α, β, γ en el módulo, $[\alpha, [\beta, \gamma]] + [\gamma, [\alpha, \beta]] + [\beta, [\gamma, \alpha]] = 0$). Definiremos este corchete para cada par de elementos de la base π_0 , y luego lo extenderemos a $\mathbb{Z}[\pi_0]$ por bilinealidad.

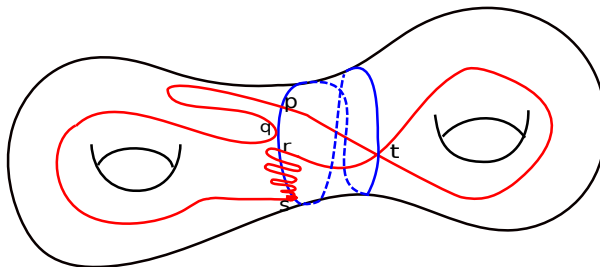


FIGURA 2. Los puntos p y r son puntos transversales dobles. Los puntos q y s no son transversales. El punto t es transversal y no es doble, sino triple.

Considere dos clases de homotopía libre A y B y un par de representantes a y b . Podemos asumir (haciendo una pequeña homotopía de ser necesario) que a y b son representantes de A y B que se intersectan únicamente en puntos transversales dobles p_1, p_2, \dots, p_n (ver Figura 2 para ejemplos de puntos transversales dobles). Hay finitos puntos de intersección en virtud de la transversalidad.

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, denotemos por $a \cdot_{p_i} b$ al lazo que comienza en p_i , recorre a hasta alcanzar p_i de nuevo, y luego “voltea” y recorre b (ver Figura 3). Esto es, $a \cdot_{p_i} b$ es el producto basado de lazos entre a y b con punto base p_i .

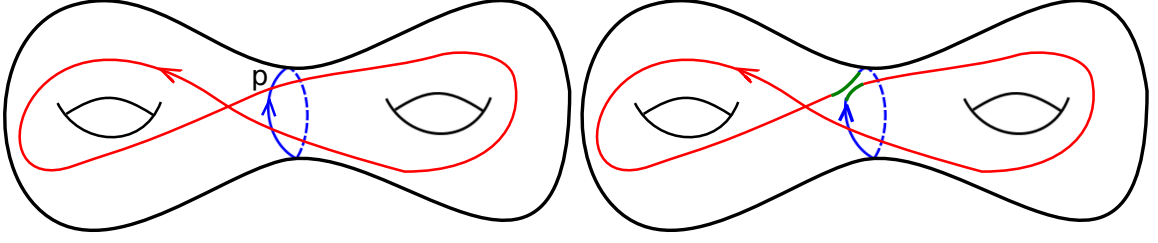


FIGURA 3. Producto basado de lazos (derecha) en el punto de intersección p de las curvas a la izquierda.

Cada punto de intersección p_i determina una orientación, yendo de la rama positiva de a a la rama positiva de b . Asociamos un signo s_i a p_i , haciendo $s_i = 1$ si la orientación de la superficie Σ coincide con la orientación determinada por p_i , y $s_i = -1$ en el otro caso.

Finalmente, el corchete de Goldman $[A, B]$ se define como la suma sobre los puntos de intersección de a y b de las clases de homotopía libre con signo del producto de los lazos a y b basado en p_i . En símbolos,

$$[A, B] = \sum_{p_i \in a \cap b} s_i \cdot \mathcal{FH}(a \cdot_{p_i} b)$$

Dado que el corchete se definió usando representantes, se debe verificar que éste es, luego de agrupar términos, independiente de las elecciones.

Teorema 3.1. [10] *El corchete de Goldman está bien definido, es anti-simétrico y satisface la identidad de Jacobi. En símbolos, para cada tripleta de elementos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\pi_0]$,*

$$[\alpha, \beta] = -[\beta, \alpha] \quad \text{y} \quad [\alpha, [\beta, \gamma]] + [\gamma, [\alpha, \beta]] + [\beta, [\gamma, \alpha]] = 0.$$

Demostración. Aquí daremos un esbozo de la prueba de la buena definición del corchete y referimos al lector a [10] para una prueba más precisa: Dados dos pares de curvas a y b , y a' y b' , con a homotópica a a' y b homotópica a b' , existe una homotopía que deforma simultáneamente un par de curvas en el otro par. Para una homotopía típica hay finitos instantes de tiempo durante esta deformación $(a, b) = (a_0, b_0)$, $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) = (a', b')$ tales que la diferencia en los puntos de intersección entre (a_i, b_i) y (a_{i+1}, b_{i+1}) puede ser descrita por las Figuras 4 y 5. Dado que por los Ejercicios 5 y 6 el corchete no cambia al reemplazar cada figura por la correspondiente, entonces el corchete no cambia a lo largo de toda la homotopía. \square

Ejercicio 4. *Pruebe que el corchete de Goldman satisface la identidad de Jacobi. (Pista: Empiece con un ejemplo concreto de tres curvas a, b, c que se intersectan de dos en dos posiblemente en más de un punto, y pruebe que los tres corchetes triples dan términos que se cancelan a pares. Luego generalice el argumento para todas las clases).*

Ejercicio 5. *Sean a y b dos curvas que se intersectan solamente en puntos transversales dobles y sean p y q dos de estos puntos. Supongamos que p y q yacen en la superficie como en la Figura 4, lado izquierdo (Esta configuración de arcos es llamada “bigon” en inglés, haciendo referencia a un polígono de dos lados). Muestre que los términos del corchete de Goldman de $\mathcal{FH}(a)$ y $\mathcal{FH}(b)$ correspondientes a p y q se cancelan. (Asegúrese de considerar todas las posibles direcciones de las curvas a y b).*

Ejercicio 6. *Sean a y b dos curvas que se intersectan solamente en puntos transversales dobles y que localmente cerca a algún punto consisten de las ramas del lado izquierdo o el lado derecho de la Figura 5. Note que en cada caso una curva usa dos ramas y la otra una sola rama. El paso de izquierda a derecha es llamado un movimiento de punto triple. Considere todos los casos y muestre que el corchete no se altera por un movimiento de punto triple. (Por tanto debe mostrarse que los términos del corchete que corresponden a los puntos de intersección p y q son iguales a los términos del corchete correspondientes a los puntos r y s).*

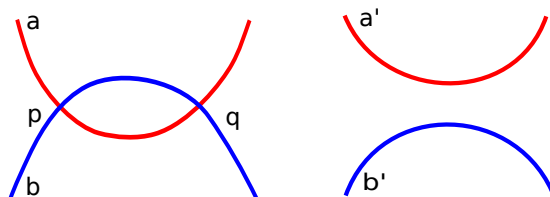


FIGURA 4. Ejercicio 5

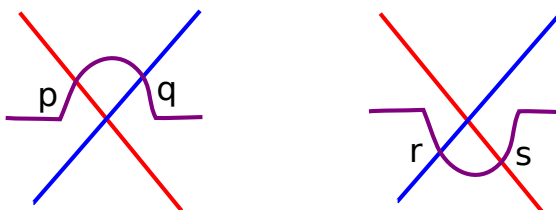


FIGURA 5. Ejercicio 6

Como se mencionó al principio, el conjunto π_0 de clases de homotopía libre no posee una estructura algebraica obvia. En particular, curvas sin punto base no pueden ser multiplicadas (nótese que lazos con el mismo punto base sí pueden ser multiplicados). Al computar el corchete, se consideran todos los puntos donde es posible multiplicar (los puntos de intersección), y en cada uno de estos puntos se lleva a cabo la multiplicación. Entonces la combinación lineal de los resultados de la multiplicación produce el corchete de Goldman.

Ejercicio 7. Recordemos que el grupo fundamental del toro es un grupo libre abeliano en dos generadores, a y b . Pruebe lo siguiente:

- (1) Hay una biyección entre π_0 y el conjunto $\{a^i b^j; i, j \in \mathbb{Z}\}$.
- (2) Calcule $[a^i b^j, a^h b^k]$ para cada $i, j, h, k \in \mathbb{Z}$. (Pista: Calcule $[a, b]$, $[a^i, b]$, $[a^i, b^k]$ y $[a^i b^j, b^k]$. La fórmula para el caso general involucra un determinante).
- (3) Pruebe algebraicamente que el corchete de Goldman para el toro satisface la identidad de Jacobi.

Ejercicio 8. Pruebe que el álgebra de Lie de Goldman de una superficie orientada Σ (no necesariamente conexa) es la suma directa de las álgebras de Lie para las componentes conexas de Σ .

4. EJEMPLOS

Supongamos que la superficie Σ es conexa. Dado que por el Ejercicio 2 hay una biyección entre π_0 y el conjunto de clases de conjugación de $\pi_1(\Sigma)$, podemos identificar a π_0 con dicho conjunto de clases de conjugación.

Si $\alpha \in \pi_1(\Sigma)$, denotemos por $c(\alpha)$ la clase de conjugación de α .

Ejercicio 9. Muestre que el corchete de las dos clases representadas por las dos curvas en el lado izquierdo de la Figura 3 tiene dos términos que no se cancelan. (Este ejercicio no es fácil. Puede hacerse usando el hecho de que el grupo fundamental de la superficie puede ser descrito como un producto libre con amalgamamiento).

Ejercicio 10. Considere el espacio de pantalones con generadores estándar a y b como en la Figura 6. Muestre que para una de las dos orientaciones posibles del espacio de pantalones, lo siguiente es cierto:

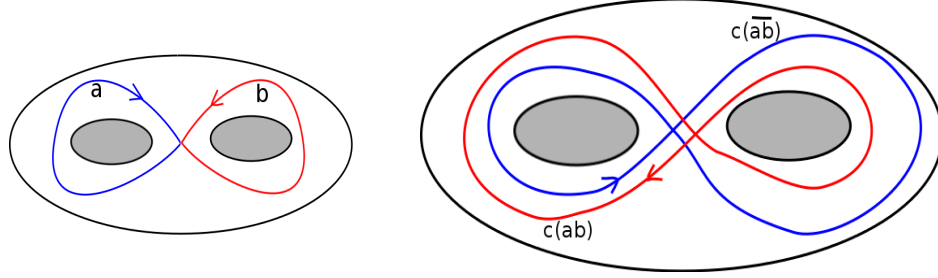


FIGURA 6. Un conjunto de generadores del grupo fundamental del espacio de pantalones (izquierda) y representantes de las clases en el Ejercicio 10(3) (derecha).

- (1) $[c(ab), c(\bar{b}\bar{a})] = c(b\bar{a}\bar{b}\bar{a}) - c(ab\bar{a}\bar{b})$,
- (2) $[c(ab), c(aab)] = 0$,
- (3) $[c(ababab), c(ab)] = 3(c(bababbaa) - c(ababaabb))$.

Mostramos en el Ejercicio 3 que para una superficie conexa con frontera hay una correspondencia uno-a-uno entre π_0 y las palabras cíclicas reducidas en un conjunto minimal de generadores del grupo fundamental. Así, el corchete de Goldman determina un álgebra de Lie en el módulo generado por palabras cíclicas reducidas en un alfabeto finito. Este corchete fue descrito de manera puramente combinatoria en [2]. He aquí una idea aproximada: El corchete de dos palabras cíclicas reducidas se calcula encontrando ciertos “cortes” o espacios entre letras de cada palabra (cada par de cortes corresponde a un punto de intersección minimal), abriendo cada palabra para obtener dos palabras lineales, y luego tomando la palabra cíclica reducida determinada por la concatenación de estas dos palabras. El Ejercicio 10 ilustra estas ideas.

5. LA RELACIÓN ENTRE EL CORCHETE DE DOS CURVAS Y EL NÚMERO DE PUNTOS DE INTERSECCIÓN

Recordemos que el *número de intersección geométrica* $i(A, B)$ (o simplemente *intersección de dos clases de homotopía libre* A y B) es el número más pequeño de puntos de intersección transversal mutua de pares de representantes a y b , contados con multiplicidad. Equivalentemente, el número mínimo de intersección puede ser definido como el número más pequeño de puntos de intersección mutua de pares de representantes, dado que los pares considerados se intersecten solamente en puntos transversales dobles.

La *auto-intersección de una clase de homotopía libre* A , $SI(A)$ es el número más pequeño de cruces transversales de representantes de A , contados con multiplicidad.

Un resultado de Haas y Scott [11], refraseado más abajo en el Teorema 5.1, será usado para determinar los números mínimos de auto-intersección e intersección de clases de homotopía libre.

Teorema 5.1. [11] *Si a es una curva cerrada en una superficie orientable Σ , y el número de auto-intersección de a es estrictamente mayor que la auto-intersección mínima de su clase libre de homotopía, entonces una de las siguientes es cierta:*

- (1) *hay arcos disjuntos X y Y del círculo (parametrizando la aplicación a) tales que a identifica los extremos de X y Y , y $a|_{X \cup Y}$ define un lazo homotópico a un lazo trivial en Σ .*
- (2) *hay un sub-arco X del círculo tal que a identifica los extremos de X y $a|_X$ define un arco nulhomotópico en Σ .*

Un elemento de $\mathbb{Z}[\pi_0]$ puede ser escrito como una combinación lineal $c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_nA_n$, donde cada $A_i \in \pi_0$ y $A_i \neq A_j$ si $i \neq j$. La *norma Manhattan* (o l_1 -norma) de $c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_nA_n$, $M(c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_nA_n)$, es el número de términos contados con multiplicidad, esto es, $|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_n|$.

Dado que el corchete de Goldman de dos clases A y B se define como una suma sobre los puntos de intersección de representantes, el número de términos no puede exceder el número de intersección $i(A, B)$. En efecto, se puede calcular el corchete como una suma sobre los puntos de intersección de dos representantes que se interseccionen de manera minimal, y por ende hay a lo sumo $i(A, B)$ términos. Luego de “asignar” un término a cada punto de intersección y tomar la suma algebraica, puede haber algunas cancelaciones en el proceso de agrupación. Por ello tenemos

Proposición 5.2. *Para cada par A, B de clases de homotopía libre, $M[A, B] \leq i(A, B)$.*

Ejercicio 11. *Sean a y b como en el Ejercicio 10. Pruebe lo siguiente (Recuerde que SI denota auto-intersección):*

- (1) $M[c(ab), c(aab)] < i(c(ab), c(aab))$.
- (2) $M[c(ab), c(\bar{a}\bar{b})] = i(c(ab), c(\bar{a}\bar{b}))$.
- (3) $M[c(ab), c((ab)^3)] = 2 \cdot 3 \cdot SI(ab)$.
- (4) $M(C, D) = i(C, D)$ donde C y D son las clases de homotopía libre de las dos curvas en la Figura 3, izquierda.

(Pista: Pruebe mediante el Teorema 5.1, $SI(c(ab)) = 1$, $i(c(ab), c(aab)) = 2$ y $i(c(ab), c(\bar{a}\bar{b})) = 2$).

Por el Ejercicio 11(1), $M(A, B)$ y $i(A, B)$ no siempre son iguales y por el Ejercicio 11(2), no siempre son distintos. Una pregunta natural es si hay condiciones necesarias sobre A y B de tal forma que la igualdad $M[A, B] = i(A, B)$ se cumpla. La primera respuesta a esta pregunta fue dada por Goldman, quien probó:

Teorema 5.3. [10] *Si A tiene un representante sin auto-intersecciones y $[A, B] = 0$ entonces A y B tienen representantes disjuntos. En otras palabras, $[A, B] = 0$ si y sólo si $i(A, B) = 0$, dado que $SI(A) = 0$. Refraseado en nuestra notación, si $SI(A) = 0$ y $M[A, B] = 0$, entonces $i(A, B) = 0$.*

Hemos generalizado el resultado de Goldman como sigue:

Teorema 5.4. [3] *Si A tiene un representante sin auto-intersección entonces la norma Manhattan del corchete de A y B equivale al número de intersección de A y B . En símbolos, si $SI(A) = 0$ entonces $M[A, B] = i(A, B)$.*

El Ejercicio 11(4) ilustra el Teorema 5.4.

La herramienta principal en la prueba del Teorema 5.4 es escribir el grupo fundamental de Σ como un producto libre con amalgamamiento de las componentes de $\Sigma \setminus a$ si a separa a Σ , o la extensión HNN de $\Sigma \setminus a$ si a no separa. Como a es simple, las clases de conjugación y los términos del corchete pueden describirse combinatoriamente en términos de estas estructuras.

Junto con Krongold hemos probado:

Teorema 5.5. [5] *Si Σ es una superficie con frontera no vacía, y A es una clase de homotopía libre de curvas en A que no es una potencia propia, entonces la norma Manhattan del corchete de Goldman de A^p y A^q , $M[A^p, A^q]$ es $2 \cdot p \cdot q$ multiplicado por el mínimo número posible de auto-intersecciones de representantes de la clase de homotopía libre A , dado que p y q sean enteros positivos distintos y alguno de ellos sea mayor que tres.*

El Ejercicio 11(3) ilustra el Teorema 5.5.

Ejercicio 12. *Muestre que para cada $A \in \pi_0$, los términos del corchete $[A, \bar{A}]$ son clases de conjugación de conmutadores de elementos de $\pi_1(\Sigma)$. (El Ejercicio 11(2) es un ejemplo de un corchete de la forma $[A, \bar{A}]$).*

Conjuntamente con Gadgil, hemos probado que el corchete de Goldman, junto con la operación de potencia, puede contar intersecciones y auto-intersecciones en todas las superficies orientables (con o sin frontera). Los siguientes dos teoremas son casos especiales de nuestros resultados.

Teorema 5.6. [6] *Si a y b son dos clases de homotopía libre distintas en una superficie orientada (con o sin frontera), entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que el número de intersección de a y b es igual al número de términos (contados con multiplicidades) del corchete $[a, b^q]$ dividido por q , para todo $q \geq c$. En símbolos, $M[a, b^q] = q \cdot i(a, b)$, para todo q tal que $q \geq c$.*

Teorema 5.7. [6] *Si a es una clase de homotopía libre en una superficie orientada (con o sin frontera) que no es la potencia de alguna otra clase, entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que el número de auto-intersección de a es igual al número de términos (contado con multiplicidad) del corchete $[a, a^q]$, dividido por $2 \cdot q$ para todo $q \geq c$. En símbolos, $M[a, a^q] = 2 \cdot \text{SI}(a)$ para todo $q \geq c$.*

Ejercicio 13. *Otal [17] mostró que dados A y B en π_0 , existe $C \in \pi_0$ tal que $i(A, C) \neq i(B, C)$. Combine este resultado con uno de los teoremas en esta sección para probar que dadas dos clases de homotopía libre de curvas A y B , existe una tercera clase $C \in \pi_0$ tal que $[A, C]$ no es igual a $[B, C]$. (Pista: Para cualquier par de clases $X, Y \in \pi_0$ que no sean potencias y cualquier entero positivo q , $i(X, Y^q) = q \cdot i(X, Y)$).*

6. PROBLEMAS ABIERTOS Y GENERALIZACIONES

6.1. La estructura del álgebra de Lie de Goldman. El corchete de Goldman determina un álgebra de Lie de dimensión finita y no es mucho lo que se sabe acerca de su estructura. Esta álgebra de Lie no es, excepto por el caso del toro, una de las álgebras de Lie mejor entendidas como aquellas de Kac-Moody [13].

Respecto a la estructura de estas álgebras de Lie, Etingof [7] probó lo siguiente utilizando herramientas algebraicas.

Teorema 6.1. *El centro del álgebra de Lie de Goldman de una superficie cerrada y orientada es el subespacio unidimensional generado por el lazo trivial \circ .*

Kawazumi y Kuno [14] estudiaron el centro del álgebra de Lie de Goldman en una superficie de género infinito con una componente de frontera. Esta superficie es construida de la siguiente manera: se toman los puntos en la frontera de una superficie compacta orientada de género g con una sola componente de frontera, y se identifican con los puntos en una de las fronteras de una superficie de género 1 con dos componentes de frontera, obteniendo una superficie de género $g + 1$ con una componente de frontera y un embebimiento $i_g: \Sigma_{g,1} \rightarrow \Sigma_{g+1,1}$. La superficie $\Sigma_{\infty,1}$ es el límite inductivo de estos embebimientos.

Teorema 6.2. *El centro del álgebra de Lie de Goldman de la superficie Σ_{∞} es el subespacio unidimensional generado por el lazo trivial \circ .*

Si una superficie tiene frontera no vacía, no es difícil ver que las combinaciones lineales de clases de conjugación de curvas paralelas a las componentes de frontera están en el centro.

Recientemente, Kabiraj [12] probó lo siguiente:

Teorema 6.3. *El centro del álgebra de Lie de Goldman de una superficie compacta orientada (con o sin frontera) es finitamente generado, y su base consiste de combinaciones lineales de todas las clases de conjugación paralelas a las componentes de frontera (esto es, todas las potencias de componentes de frontera) y el lazo trivial \circ .*

Los métodos de Kabiraj son completamente diferentes a los de Etingof: él combina resultados de [6] con el hecho de que todos los levantamientos a la cubierta universal de geodésicas simples cerradas son disjuntos.

Problema Abierto 1. *Un elemento $A \in \pi_0$ determina una aplicación lineal ad_A de $\mathbb{Z}[\pi_0]$ en sí mismo, definida por $\text{ad}_A(B) = [A, B]$. Caracterizar el kernel de ad_A para cada $A \in \pi_0$.*

Problema Abierto 2. *Decidir si el álgebra de Lie de Goldman es finitamente generada.*

Además del álgebra de Lie de Goldman de lazos en una superficie Σ , el *álgebra de Lie de Goldman homológica* en Σ introducida por Goldman [10] se define así: denote por H al primer grupo de homología de Σ con coeficientes en \mathbb{Z} , y por $\mathbb{Z}[H]$ al \mathbb{Z} -módulo libre en H . El corchete de dos elementos α, β en la base H es definido como $(\alpha, \beta) \cdot (\widehat{\alpha + \beta})$, donde (α, β) denota el emparejamiento de intersección y $\widehat{\alpha + \beta}$ la clase de homología de $\alpha + \beta$ en H . Hay una aplicación natural de $\mathbb{Z}[\pi_0]$ a $\mathbb{Z}[H]$.

Toda [20] caracterizó los ideales del álgebra de Lie de Goldman $\mathbb{Z}[H]$ tensorizada con \mathbb{Q} . Kawazami, Kuno y Toda [16] probaron que $\mathbb{Z}[H]$ tensorizada con \mathbb{Q} es finitamente generada si el emparejamiento de intersección es no-degenerado.

6.2. El álgebra de Lie de Goldman y la intersección de curvas en superficies. Mediante experimentos a computador (usando la presentación del álgebra de Lie de Goldman en [2]), hemos mostrado que en algunas superficies con frontera y cuyo grupo fundamental tiene un número de generadores relativamente pequeño (a lo sumo 4) si A es representado por una palabra relativamente pequeña (de a lo sumo 16 letras) que no es una potencia propia, entonces $M[x, \bar{x}] = 2 \cdot \text{SI}(x)$ (ver Ejemplo (b)). Ésto nos lleva a lo siguiente:

Problema Abierto 3. *Probar la siguiente conjetura: Si $A \in \pi_0$ no es una potencia de otra clase entonces $M[A, \bar{A}] = 2 \cdot \text{SI}(A)$. En palabras, dos veces el número de auto-intersección es el número de términos en el corchete de la clase de una curva con su inversa.*

Problema Abierto 4. *Por el Ejercicio 12, para cada $A \in \pi_0$, los términos del corchete $[A, \bar{A}]$ son conmutadores. Sería interesante llegar a un mejor entendimiento de este fenómeno, y cómo se relaciona con la serie central descendente del grupo fundamental.*

Se sabe que salvo deformación (ver por ejemplo [8]), cualquier homeomorfismo de una superficie en sí misma es una composición de los llamados *twists de Dehn* (Recordemos que un *twist de Dehn* respecto a una curva embebida a se obtiene cortando a lo largo de a , girando 360° y volviendo a pegar). En [15] una fórmula para la acción de un twist de Dehn en el anillo de grupo del grupo fundamental de una superficie fue encontrada (luego de cierta completación). La fórmula usa una operación de topología de cuerdas como aquella usada en el corchete de Goldman.

Es interesante que la fórmula tenga sentido para curvas no embebidas, definiendo “twists de Dehn generalizados en el anillo de grupo (completado)” [15].

6.3. Topología de cuerdas. Las ideas de Goldman [10] y Turaev [21] inspiraron a la autora en colaboración con Dennis Sullivan a darse cuenta que estas estructuras existen para todas las variedades orientadas M . Los módulos subyacentes son diferentes grupos de homología (ordinaria y equivariante) del espacio de todas las aplicaciones suaves del círculo en M , o ciertos subconjuntos naturales, como en [4], [1]. Las extensiones de estas ideas llevan a actividad algebraica relacionada a las álgebras con dualidad.

Observación 6.4. Dado que hay una biyección natural entre el conjunto de clases de homotopía libre de curvas en una superficie y las componentes del espacio de lazos libres, hemos denotado el conjunto de clases de homotopía libre por π_0 . Las combinaciones lineales de estas componentes forman el 0-ésimo grupo de homología ordinaria y homología equivariante del espacio de lazos libres.

REFERENCIAS

- [1] S. Basu, *Transversal String Topology and Invariants of Manifolds*, Ph.D. Thesis, Stony Brook, 2011.
- [2] M. Chas, *Combinatorial Lie bialgebras of curves on surfaces*, *Topology* **43**, (2004), 543-568.
- [3] M. Chas, *Minimal intersection of curves on surfaces*, *Geometriae Dedicata*, 144 (1), 25-60.
- [4] M. Chas and D. Sullivan, *String Topology*.

- [5] Chas, M., Krongold, F., *An algebraic characterization of simple closed curves on surfaces with boundary*, Journal of Topology and Analysis, 2010, Vol 2, (3) 395–417.
- [6] M. Chas and S. Gadgil, *The extended Goldman bracket determines intersection numbers for surfaces and orbifolds*, Algebraic and Geometric Topology 16.5 (2016): 2813-2838. <http://arxiv.org/abs/1209.0634>
- [7] P. Etingof, *Casimirs of the Goldman Lie algebra of a closed surface*, Intern. Math. Res. Notices 2006, 1-5 (2006).
- [8] B. Farb, D. Margalit *A Primer on Mapping Class Groups*, (PMS-49) Princeton University Press 2011.
- [9] S. Gadgil, *The Goldman bracket characterizes homeomorphisms* Comptes Rendus Mathematique, Vol. 349, Issue 23, Pages 1269-1272
- [10] W. M. Goldman, *Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations*, Invent. Math. **85**, No.2, (1986), 263-302.
- [11] J. Hass, P. Scott, *Intersections of curves on surfaces*, Israel J. Math. Vol 51 (1985), 90-120.
- [12] A. Kabiraj. *Center of the Goldman Lie algebra.* Algebraic and Geometric Topology 16.5 (2016): 2839-2849. <http://arxiv.org/abs/1412.2331>
- [13] V. G. Kac *Infinite-Dimensional Lie Algebras*, 3rd edition, Cambridge University Press, 1990.
- [14] N. Kawazumi , Y. Kuno *The center of the Goldman Lie algebra of a surface of infinite genus*, Quarterly J. Math., **64** (2013) 1167-1190.
- [15] N. Kawazumi , Y. Kuno *The logarithms of Dehn twists*, to appear in Quantum Topology.
- [16] N. Kawazumi , Y. Kuno, K. Toda *Generators of the homological Goldman Lie algebra*, to appear in Osaka J. Math
- [17] J.-P. Otal, *Le Spectre Marque des Longueurs des Surfaces a Courbure Negative*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. **131**, No. 1 (Jan., 1990), pp. 151-162.
- [18] D. Sullivan, *Open and closed string field theory interpreted in classical algebraic topology*, Topology, Geometry, and Quantum Field Theory, London Math. Soc. Lecture Notes vol. **308** (2004), 344 -357.
- [19] W. Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds* <http://library.msri.org/books/gt3m/>
- [20] K. Toda, *The ideals of the homological Goldman Lie algebra*, preprint, arXiv:1112.1213 (Math. GT) (2011)
- [21] Turaev, V. G., *Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **24**, No. 6, (1991), 635-704 .

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, STONY BROOK UNIVERSITY, STONY BROOK, NY, 11794

E-mail address: moira@math.sunysb.edu