INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA NO CONMUTATIVA

JOHN R. SKUKALEK

1. Funciones continuas en espacios topológicos

Empezamos con la siguiente pregunta.

Pregunta 1.1. *¿ Qué nos pueden decir las funciones continuas sobre espacios topológicos?*

Por una *función continua f en un espacio topológico X* queremos decir un mapa continuo

$$f : X \to \mathbb{C}$$

donde el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ está dada la topología usual (euclideana) definida por la norma

$$|z| = \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

donde $\bar{z} = x - iy$ es el conjugado complejo de $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. ¡ Recuerda la primera igualdad arriba! Estará de vuelta...

Nos referimos al rector a [Mor16] para todas las cuestiones de la topología general.

Definición 1.2. Una función continua $f : X \to \mathbb{C}$ *se anula en infinito* si para cada $\epsilon > 0$, existe un conjunto compacto $K \subseteq X$ tal que $|f(p)| < \epsilon$ cuando $p \in X \backslash K$ ($p \in X$ y $p \notin K$).

Ejemplo 1.3. Si X es compacto, entonces una funcón continua en X debe ser acotada y además se anula en infinito. En general, cualquier función que se anula en infinito debe ser acotada.

Ejemplo 1.4. Si $X = \mathbb{R}$ (con la topología usual), entonces en el idioma de límites, f se anula en infinito si y solo si

$$\lim_{p\to\infty} f(p) = \lim_{p\to-\infty} f(p) = 0.$$

Ejemplo 1.5. Si $X = \mathbb{C}$ (con la topología usual) y $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^2$ denota la esfera de Riemann, entonces f se anula en infinito si y solo si f se puede extender a una función continua $f^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ tal que $f(\infty) = 0$.

Este ejemplo se puede generalizar bastante.

Ejemplo 1.6. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ ($\mathcal{T}$ es la topología en X), podemos definir

$$X^* = X \cup \{\infty\},\ \infty \notin X,$$

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{(X\backslash K) \cup \{\infty\} \mid K \subseteq X \text{ y } K \text{ es compacto}\}.$$

El punto ∞ se llama *el punto en infinito en* X^* . Tenemos un mapa continuo y abierto $X \to X^*$ tal que la imagen de X es densa en X^* si y solo si X no es compacto. (∞ es un punto aislado de X^* si X es compacto). $(X^*, \mathcal{T}^*)$ es un espacio topológico compacto, se llama la *compactificación de un punto (o compactificación de Alexandroff) de* $(X, \mathcal{T})$. Una función continua en X se anula en infinito si y solo si f se puede extender a una función continua f^* en X^* tal que $f^*(\infty) = 0$.

Problema 1.7. *Sea X un espacio topológico. Demuestra que:*

(1) *Cada función constante en X es continua.*
(2) *X es compacto si y solo si cada función constante en X se anula en infinito.*
(3) *X es conexo si y solo si cada función continua no constante en X tiene rango infinito.*

Definición 1.8. Dadas funciones f y g en X, $p \in X$, y $\alpha \in \mathbb{C}$, definimos:

- $(f + g)(p) = f(p) + g(p)$.
- $(fg)(p) = f(p)g(p)$ (fg se denota también por $f \cdot g$).
- $\alpha f = fg$, donde g es la función constante con valor α.

Problema 1.9. (1) *Si f y g son continuas, entonces también lo son $f + g$, fg, y αf.*
(2) *Si f y g son acotadas, entonces también lo son $f + g$, fg, y αf.*
(3) *Si f y g se anulan en infinito, entonces también lo hacen $f + g$, fg, y αf.*

Definición 1.10. Una secuencia de funciones (f_n), $n \in \mathbb{N}$, en X *converge uniformemente* a una función f en X (escribimos $f_n \to f$ uniformemente) si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(p) - f(p)| < \epsilon$ para cada $p \in X$ cuando $n > n_0$.

Problema 1.11. *Supone que $f_n \to f$ uniformemente.*

(1) *Si f_n es continua para todo n, entonces f es continua.*
(2) *Si f_n es acotada para todo n, entonces f es acotada.*
(3) *Si f_n se anula en infinito para todo n, entonces f se anula en infinito.*

Tenemos la siguiente reformulación algebraica de Problema 1.7.

Problema 1.12. *Demuestra que:*

(1) *X es compacto si y solo si existe una función continua f en X que se anula en infinito tal que $fg = g$ para todas funciones g on X.*
(2) *X es conexo si y solo si no existe una función no constante continua f en X tal que $f^2 = f$ (donde f^2 significa $f \cdot f$).*

Definición 1.13. Un *álgebra* (complejo y no asociativo) es un espacio vectorial complejo con un producto asociativo y bilineal

$$A \times A \to A,$$
$$(x, y) \mapsto xy \quad (\text{o } x \cdot y).$$

(En particular, A es un anillo.) A es *conmutativo* si el producto es conmutativo, es decir $xy = yx$ para todo $x, y \in A$. A es *unital* si existe $1 \in A$ (tal vez 1_A), $1 \neq 0$, tal que $1 \cdot x = x \cdot 1$ para todo $x \in A$. Un elemento $x \in A$ es *invertible (en A)* si existe $y \in A$ tal que $xy = yx = 1$.

En este caso y solo depende en x y lo denotamos por x^{-1}. Un elemento $x \in A$ es (un) *idempotente* si $x^2 = x$ (donde x^2 significa $x \cdot x$). Por ejemplo, 0 y 1 son idempotents, se llaman *idempotentes triviales*.

Ejemplo 1.14. El álgebra $M_n(\mathbb{C})$ que consiste en todos las mátrices complejas $n \times n$. Es conmutativo si y solo si $n = 1$. Identificamos $M_1(\mathbb{C})$ con $\mathbb{C}$. Es unital y contiene idempotentes no triviales si y solo si $n > 1$.

Ejemplo 1.15. El álgebra $L(V)$ que consiste en todos los mapas lineales $V \to V$ donde V es un espacio vectorial complejo. El producto es composición de mapas.

Definición 1.16. Sean A y B álgebras. Un mapa $\phi : A \to B$ es un *homomorfismo (de álgebras)* si ϕ es lineal y $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ para todo $x, y \in A$. Si ϕ es biyectivo, ϕ se llama un *isomorfismo (de álgebras)*. Si existe tal isomorfismo, decimos que A y B son *isomorfos (como álgebras)*, y escribimos $A \cong B$. Esta es una relación de equivalencia entre álgebras.

Ejemplo 1.17. V es un espacio vectorial complejo de dimensión $n \in \mathbb{N}$ si y solo si $L(V) \cong M_n(\mathbb{C})$.

Definición 1.18. Sea A un álgebra. Un subespacio $B \subseteq A$ tal que $xy \in B$ cuando $x, y \in B$ se llama un *subalgebra de A*. Si adicionalmente $xy, yx \in B$ cuando $x \in A$ y $y \in B$, B se llama un *ideal (de dos lados) de A*.

Un subalgebra es en sí mismo un álgebra. El subespacio trivial $\{0\}$ y A sí mismo son ideales de A. A es *simple* si no tiene mas ideales.

Ejemplo 1.19. $L(V)$ es simple si y solo si $\dim(V)$ es finita.

Regresamos a más ejemplos de álgebras.

Ejemplo 1.20. El álgebra $\mathbb{C}^X$ que consiste en todas las funciones (no necesariamente continuas) $X \to \mathbb{C}$ donde X es cualquier conjunto no vacío. Es conmutativo y unital. Si X es un espacio topológico, el álgebra $C(X)$ que consiste en todas las funciones continuas en X es un subalgebra unital de $\mathbb{C}^X$, y el álgebra $C_b(X)$ que consiste en todas las funciones continuas y acotadas en X es un subalgebra unital de $C(X)$. El álgebra $C_0(X)$ que consiste en todas las funciones continuas que se anulan en infinito es un ideal en $C(X)$. Según Problema 1.12, tenemos que:

- $C_0(X)$ es unital si y solo si X es compacto.
- $C(X)$ (o $C_b(X)$) tiene idempotentes no triviales si y solo si X es conexo.

En esta manera la estructura de tales álgebras nos pueden decir sobre la topología de X. Terminamos esta sección con una elaboración de Pregunta 1.1.

Pregunta 1.21. *¿ Bajo que circunstancias tales álgebras nos pueden decir "todo" sobre la topología de X? Por ejemplo, ¿ cuando tenemos que $C_0(X)$ es isomórfo a $C_0(X)$ si y solo si X es homeomórfo a Y?*

La dirección "si" es verdad en general, pero la dirección "solo si" no lo es.

Ejemplo 1.22. Si X es cualquier conjunto con la topología trivial donde solo X y el conjunto vacío son abiertos, entonces $C(X) = C_0(X) \cong \mathbb{C}$.

2. Álgebras de Banach

Recordemos que un *espacio de Banach* es un espacio vectorial normado, en cual $\|x\|$ denota la norma de x, que es un espacio métrico completo con respecto a la métrica d definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Definición 2.1. Un *álgebra de Banach* es un espacio de Banach A que también es un álgebra tal que

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

para todo $x, y \in A$. Si A es unital, asumimos que $\|1_A\| = 1$. (Si $\|1_A\| \neq 1$, entonces existe una norma equivalente en A con la propiedad deseada.) Un subalgebra cerrado de un álgebra de Banach se llama un *subalgebra de Banach de A* y es en sí mismo un álgebra de Banach.

Muchos de los ejemplos de álgebras que ya vimos en la sección anterior son ejemplos de álgebras de Banach.

Ejemplo 2.2. $M_n(\mathbb{C})$ con la norma

$$\|A\| = \max\{\|Ax\| \mid x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}.$$

Ejemplo 2.3. Si V y W son espacios vectoriales normados, entonces un operador lineal $T : V \to W$ es continuo si y solo si T es acotado, es decir el imagen de cualquier conjunto acotado en V es acotado en W. Tenemos la norma operador de T (como en el ejemplo anterior) dada por

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid x \in V, \|x\| = 1\} = \inf\{c \in \mathbb{R} \mid \|T(x)\| \leq c\|x\| \ \forall x \in V\}.$$

Si V es un espacio de Banach, el álgebra $B(V)$ que consiste en todos los operadores lineales y acotados $V \to V$ es un álgebra de Banach. Si la dimensión de V es $n \in \mathbb{N}$, entonces existe un isomorfismo de álgebras $\phi : B(V) \to M_n(\mathbb{C})$ que también es una isometria, es decir $\|\phi(T)\| = \|T\|$ para todo $T \in B(V)$.

Ejemplo 2.4. El espacio vectorial $l^1(\mathbb{Z})$ consiste en todas las funciones (o secuencias) $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto x_n$, tal que la suma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|$ es finita. En este caso definimos $\|x\|$ como esta suma, y definimos el *producto de convolución* xy (frecuentemente escrito como $x * y$) como

$$(xy)_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n y_{k-n}.$$

(La suma converge absolutamente.)

Problema 2.5. *Verifica que $l_1(\mathbb{Z})$ es un álgebra de Banach conmutativo y unital.*

Ejemplo 2.6. En una manera similar definimos $L^1(\mathbb{R})$ reemplazando $\mathbb{Z}$ con $\mathbb{R}$, x con una función Lebesgue medible $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, y la suma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|$ con la integral (de Lebesgue) $\int_{\mathbb{R}} |f|$. El producto de convolución toma la forma

$$(fg)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t - s)\, ds.$$

$L^1(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach conmutativo y no unital.

Comentario 2.7. Los dos ejemplos anteriores se pueden generalizar a cualquier grupo localmente compacto G. Obtenemos un álgebra de Banach $L^1(G)$, cual es conmutativo si y solo si G es abeliano y unital si y solo si G es discreto.

Ejemplo 2.8. Si X es cualquier conjunto no vacío, el conjunto $\mathbb{C}_b^X$ que consiste en todas la funciones acotadas $X \to \mathbb{C}$ es un álgebra de Banach conmutativo y unital con la norma

$$\|f\| = \sup\{|f(p)| \mid p \in X\}.$$

Ejemplo 2.9. Si X es cualquier espacio de medida, $L^\infty(X)$ consiste en todas las clases de equivalencia de funciones (dos funciones son equivalentes cuando son iguales en un conjunto cuyo complemento tiene medida cero) esencialmente acotadas en X (el conjunto de números M de abajo no es vacío) con la norma

$$\begin{aligned} \|[f]\| = \inf\{M \in \mathbb{R} \mid |f(p)| \leq M &\text{ para todo } p \text{ en un subconjunto de } X \\ &\text{cuyo complemento en } X \text{ tiene medida cero}\}. \end{aligned}$$

$L^\infty(X)$ es un álgebra de Banach conmutativo y unital (y se identifica con $\mathbb{C}_b^X$ cuando X tiene la medida de contar).

Ejemplo 2.10. Si X es cualquier espacio topológico, el conjunto $C_b(X)$ que consiste en todas las funciones continuas y acotadas en X es un subalgebra de Banach unital de $\mathbb{C}_b^X$. El conjunto $C_0(X)$ que consiste en todas las funciones continuas que se anulan en infinito es un subalgebra de Banach de $C_b(X)$ y, como hemos visto, es unital si y solo si X es compacto, en cual caso $C_0(X)$ es el álgebra $C(X)$ de todas las funciones continuas en X.

Definición 2.11. Sea A un álgebra de Banach unital. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, denotamos $\lambda \cdot 1_A \in A$ simplemente por λ. Dado $x \in A$, definimos el *espectro de x* como

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda \text{ no es invertible en } A\}.$$

Ejemplo 2.12. Para $x \in M_n(\mathbb{C})$, $\sigma(x)$ consiste en todos los valores propios de x. Esto no es necesariamente verdad para $x \in B(V)$ cuando $\dim(V)$ es infinito.

Ejemplo 2.13. Para $f \in C_0(X)$ (y mas generalmente en $C_b(X)$ o $\mathbb{C}_b^X$), f es invertible si y solo si $f(p) \neq 0$ para todo $p \in X$, y por lo tanto

$$\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid f(p) = \lambda \text{ para algún } p \in X\},$$

es decir el espectro de f es su rango.

En este punto requerimos algunos resultados fundamentales del análisis funcional. Si V es cualquier espacio vectorial normado, tenemos el espacio vectorial normado dual V^* que consiste en todos las funciones acotadas (o continuas) $V \to \mathbb{C}$, que en sí mismo es un espacio vectorial normado.

Teorema 2.14 (Hahn-Banach)**.** [Sun98, Theorem 1.4.2] *Si V es un espacio vectorial normada, entonces V^* separa los puntos de V, en el sentido de que si $v, w \in V$, $v \neq w$, entonces existe $\phi \in V^*$ tal que $\phi(v) \neq \phi(w)$.*

Definición 2.15 (Principio de acotación uniforme)**.** [Theorem 1.5.16][Sun98] Sean V y W espacios de Banach y C una colleción de operadores lineales acotados $V \to W$. Si el conjunto $\{\|T(v)\| \mid T \in C\}$ es acotado en $\mathbb{R}$ para todo $v \in V$, entonces también lo es el conjunto $\{\|T\| \mid T \in C\}$. ($\|T\|$ denota la norma operador de T [Ejemplo 2.3].)

Problema 2.16. *Sea A un álgebra de Banach unital y sea $x \in A$.*

(1) *Demuestra que si $\|x - 1\| < 1$, entonces x es invertible en A. Sugerencia: Usa lo que sabes del caso $A = \mathbb{C}$ para encontrar una serie de potencias que converge a x^{-1}.*
(2) *Demuestra que $\sigma(x)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$ contenido en el disco cerrado con radio $\|x\|$ centrado en el origen. Por lo tanto $\sigma(x)$ es compacto. Sugerencia: Usa la parte (a).*
(3) *Demuestra que $\sigma(x)$ es no vacío. Sugerencia: Supone que $\sigma(x)$ es vacío, sea $\phi \in A^*$, y considera la función*

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$f(z) = \phi((x - z)^{-1}).$$

Demuestra que f es acotada y analítica en $\mathbb{C}$, y por lo tanto constante por el teorema de Liouville's theorem. Ahora aplica Teorema 2.14.

Definición 2.17. El *radio espectral* de $x \in A$ es

$$r(x) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Problema 2.18 (Teorema de aplicación espectral)**.** *Si A es un ágebra unital, $x \in A$, y $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función polinómica, definimos $p(x) \in A$ como $p(z) \in \mathbb{C}$ con $z \in \mathbb{C}$ reemplazando z con x. Demuestra que*

$$\sigma(p(x)) = p(\sigma(x)).$$

Sugerencia: Factorizar $p(z)$ con $z \in \mathbb{C}$ para obtener una factorización de $p(x)$.

Problema 2.19 (Fórmula del radio espectral)**.** *Demuestra que*

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Sugerencia: Sea $\phi \in A^*$ y considera la función

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$f(z) = \phi((1 - zx)^{-1}).$$

Encuentra una serie de potencia que converge a f en el disco centrado en 0 *con radio $r(x)^{-1}$. Aplica Teorema 2.15 a los coeficientes de la serie y también Problema 2.18.*

Ahora nos enfocaremos en álgebras de Banach conmutativos.

Definición 2.20. Sea A un álgebra de Banach conmutativo. El *espectro de A* es el conjunto $\hat{A}$ que consiste en todos los homomorfismos (de álgebras) no cero (no constantemente cero) $A \to \mathbb{C}$.

Ejemplo 2.21. El espectro de $l^1(\mathbb{Z})$ [Ejemplo 2.4] se puede identificar con el círculo unitario $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{C}$ por el mapa

$$\mathbb{T} \to l^1(\mathbb{Z}),$$
$$e^{it} \mapsto \phi_t,$$

donde

$$\phi_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{int}.$$

Ejemplo 2.22. El espectro de $L^1(\mathbb{R})$ [Ejemplo 2.6] se puede identificar con $\mathbb{R}$ por el mapa

$$\mathbb{R} \to L^1(\mathbb{R}),$$
$$t \mapsto \phi_t,$$

donde

$$\phi_t([f]) = \int_{\mathbb{R}} f(s)e^{ist}\, ds.$$

Comentario 2.23. Si G es un grupo localmente compacto abeliano, el espectro de $L^1(G)$ [Comentario 2.7] se puede identificar con el *grupo dual* $\widehat{G}$ de G, que consiste en todos los homomorfismos continuos $G \to \mathbb{T}$, se llaman los *caracteres de* G.

Proposición 2.24. *Sea A un álgebra de Banach conmutativo y unital. Entonces:*

(1) *Para todo $x \in A$,*
$$\sigma(x) = \{\phi(x) \mid \phi \in \hat{A}\}.$$
(2) *Para todo $\phi \in \hat{A}$, ϕ es acotado con $\|\phi\| = 1$.*

Demostración. Sea $\phi \in \hat{A}$ y $x \in A$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(x - \phi(x)) &= \phi(x) - \phi(\phi(x)1) \\ &= \phi(x) - \phi(x)\phi(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

si ϕ es no cero, ya que $\phi(1) = 1$. Por lo tanto $\phi(x) \in \sigma(x)$, ya que $\phi(x)$ es invertible cuando x es invertible si ϕ es no cero, y $0 \in A$ no es invertible. Entonces $\{\phi(x) \mid \phi \in \hat{A}\} \subseteq \sigma(x)$. Ahora supongamos que $\lambda \in \sigma(x)$, así que $x - \lambda$ no es invertible. Se sigue del lema de Zorn que existe un ideal máximo I de A que contiene $x - \lambda$. Cada elemento del cociente A/I debe ser invertible, es decir A/I es un cuerpo. Ya que el espectro de cada elemento de A/I deber ser no vacío [Problema 2.16 (3)], es decir para todo $y \in A$, existe $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $(y + I) - \mu$ no es invertible, así que $(y + I) - \mu = 0$, o $y + I = \mu$ ($= \mu(1_A + I)$). (Se sigue que $A/I \cong \mathbb{C}$). Definamos $\phi : A \to \mathbb{C}$ definido por $\phi(y) = \mu$ según el proceso arriba. Entonces tenemos $\phi \in \hat{A}$ y $\ker(\phi) = I$. (Lo que tenemos es una biyección entre $\hat{A}$ y los ideales máximos de A.) En particular, $x - \lambda \in \ker(\phi)$, es decir $\phi(x) = \lambda$. Entonces $\sigma(x) \subseteq \{\phi(x) \mid \phi \in \hat{A}\}$ y por lo tanto $\sigma(x) = \{\phi(x) \mid \phi \in \hat{A}\}$. Ahora observamos que, ya que $\phi(x) \in \sigma(x)$, por Problema 2.16 (1) tenemos $|\phi(x)| \leq \|x\|$. Ya que $\|1\| = 1$ y $\phi(1) = 1$, tenemos $\|\phi\| = 1$. □

Para extender resultados de álgebras de Banach unitales a álgebras de Banach no unitales, tenemos la siguiente construcción útil.

Problema 2.25. *Sea A un álgebra de Banach y sea A^+ el espacio vectorial suma directa $A \oplus \mathbb{C}$. Supone que definimos el producto*

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \beta x + \alpha y, \alpha\beta), \quad x, y \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

y la norma

$$\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|.$$

(1) *Demuestra que A^+ es un álgebra de Banach unital. Se llama la unitización (de álgebra de Banach) de A.*
(2) *Demuestra que si A es un álgebra de Banach no unital y $\phi \in \hat{A}$, entonces ϕ es acotado y $\|\phi\| \le 1$. Sugerencia: Define $\phi^+ : A^+ \to \mathbb{C}$ por $\phi^+(x, \alpha) = \phi(x) + \alpha$. Demuestra que $\phi^+ \in \widehat{A^+}$.*

Ejemplo 2.26. La unitización de $C_0(X)$ es isomorfo a $C(X^*)$ donde X^* es la compactificación de un punto de X [Ejemplo 1.6].

3. La transformación de Gelfand

Si V es un espacio vectorial normado, el espacio vectorial normado dual V^*, que consiste en todos las funciones acotadas $V \to \mathbb{C}$, es en sí mismo un espacio vectorial normado. La *topología débil* en V es la topología es la topología más débil en V (es decir cada otra topología la contiene) tal que cada $\phi \in V^*$ es continua. Así que es más débil que la topología definida por la norma (y de hecho es estrictamente más débil si y solo si la dimensión de V es infinita.), pero todavía es Hausdorff. La *topología débil-** en V^* es la topología más débil en V^* tal que cada funciona (lineal) $V^* \to \mathbb{C}$ de la forma $\phi \to \phi(x)$, donde $x \in V$, es continua. Otra vez es más débil que la topología definida por la norma pero todavía Hausdorff. Sea

$$\mathcal{B}_{V^*} = \{\phi \in V^* \mid \|\phi\| \le 1\},$$

la bola unitaria cerrada en V^*. Cuando $\dim(V)$ es finita, sabemos del teorema de Heine-Borel que $\mathcal{B}_V$ es compacto en la topología definida por la norma. Sin embargo cuando $\dim(V)$ es infinita, $\mathcal{B}_V$ no es compacto en la topología definida por la norma.

Necesitamos otro teorema fundamental del análisis funcional.

Teorema 3.1 (Banach-Alaoglu)**.** [Sun98, Theorem 1.6.9] *Si V es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}_{V^*}$ es compacto respecto a la topología débil-*.*

Según Proposición 2.24 y Problema 2.25, si A es un álgebra de Banach conmutativo, el espectro $\hat{A}$ de A está contenido en la bola unitaria cerrada $\mathcal{B}_{A^*}$ en A^* (y contendido en la esfera unitaria cuando A es unital).

Recordemos que un espacio topológico X se llama *localmente compacto* si para cada punto $p \in X$ existe un conjunto abierto $U \subseteq X$ y un conjunto compacto $K \subseteq X$ tales que $p \in U \subseteq K$.

Problema 3.2. *Demuestra que un conjunto abierto de un espacio de Hausdorff localmente compacto es localmente compacto en la topología inducida.*

Proposición 3.3. *Con la topología inducida por la topología débil-* en $\mathcal{B}_{A^*}$, $\hat{A}$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Además, $\hat{A}$ es compacto si y solo si A es unital.*

Demostración. Sean $x, y \in A$ y consideremos el conjunto

$$K_{x,y} = \{\phi \in \mathcal{B}_{A^*} \mid \phi(xy) = \phi(x)\phi(y)\}.$$

Es cerrado en $\mathcal{B}_{A^*}$ respecto a la topología débil-*, y po lo tanto compacto, ya que $\mathcal{B}_{A^*}$ es compacto en la topología débil-* [Teorema 3.1]. La intersección

$$K = \bigcap_{x,y \in A} K_{x,y}$$

también es cerrado y por lo tanto compacto. El conjunto $\{0\}$ con un elemento, donde 0 significa la funciona $A \to \mathbb{C}$ que es constantemente cero, es cerrado, así que

$$\hat{A} = K \cap (\mathcal{B}_{A^*} \setminus \{0\})$$

es un subconjunto abierto del espacio topológico compacto K. Por lo tanto [Problema 3.2] $\hat{A}$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto en la topología inducida por la topología débil-* en $\mathcal{B}_{A^*}$. □

Definición 3.4. Sea A un álgebra de Banach conmutativo y $x \in A$. Definimos

$$\hat{x} : \hat{A} \to \mathbb{C}$$

$$\hat{x}(\phi) = \phi(x).$$

La función lineal $A^* \to \mathbb{C}$, $\phi \to \phi(x)$ es continua respecto a la topología débil-* por definición, así que la restricción $\hat{x}$ a $\hat{A}$ también es continua respecto a esta topología. Cuando A es unital, $\hat{A}$ es compacto respecto a esta topología [Proposición 3.3] y cada función continua se anula en infinito. En este caso el rango de $\hat{x}$ es precisamente el espectro de x [Proposición 2.24 (1)], y por lo tanto la norma de $\hat{x}$ en $C(\hat{A})$ es el radio espectral $r(x)$.

Problema 3.5. *Si A es un álgebra de Banach conmutativo y no unital, utiliza la unitización de A [Problema 2.25] para demostrar que $\hat{x}$ se anula en infinito.*

Definición 3.6. Sea A un álgebra de Banach conmutativo. El mapa

$$\Gamma : A \to C_0(\hat{A})$$

$$\Gamma(x) = \hat{x}$$

se llama la *transformación de Gelfand de A*.

Proposición 3.7. Γ *es un homomorfismo de álgebras de Banach tal que* $\|\Gamma\| \leq 1$ *(es decir* Γ *es una contracción).*

Demostración. Es un cálculo rutinario verificar que Γ es un homomorfismo de álgebras. Observamos que si $x \in A$, tenemos

$$\|\Gamma(x)\| = \|\hat{x}\| = \sup\{|\hat{x}(\phi)| \mid \phi \in \widehat{A}\}.$$

Tenemos $\hat{x}(\phi) = \phi(x)$ y $|\phi(x)| \leq \|x\|$ ya que $\|\phi\| \leq 1$ [Proposición 2.24 y Problema 2.25]. Entonces $\|\Gamma(x)\| \leq \|x\|$. □

Ejemplo 3.8. Con el espectro de $l^1(\mathbb{Z})$ identificado con $\mathbb{T}$ [Ejemplo 2.21], la transformación de Gelfand de $l^1(\mathbb{Z})$ tiene la forma

$$\hat{x}(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{int}.$$

Ejemplo 3.9. Con el espectro de $L^1(\mathbb{R})$ identificado con $\mathbb{R}$ [Ejemplo 2.22], la transformación de Gelfand de $L^1(\mathbb{R})$ tiene la forma

$$\widehat{[f]}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)e^{ist}\,ds.$$

En esta manera la transformación de Gelfand se identifica con la *transformación de Fourier* en $\mathbb{R}$.

Comentario 3.10. Si G es un grupo localmente compact abeliano, con el espectro de $L^1(G)$ identificado con el grupo dual $\widehat{G}$ [Comentario 2.23], la transformación de Gelfand se identifica con un homomorfismo

$$L^1(G) \to C_0(\widehat{G}),$$

igual se llama la *transformación de Fourier* en G.

4. C^*-álgebras y el teorema de Gelfand-Naimark

La pregunta ahora es la siguiente.

Pregunta 4.1. *¿ Cuándo es la transformación de Gelfand un isomorfismo?*

Esta pregunta está relacionada con la siguiente.

Pregunta 4.2. *¿ Qué estructura adicional posee el álgebra de Banach $C_0(X)$?*

Si A no posee cualquier estructura poseída por $C_0(X)$, entonces no es posible tener $A \cong C_0(\widehat{A})$.

El caso más simple es $A = \mathbb{C} \cong C_0(\{p\})$. Recordemos el hecho de que para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$|z|^2 = \bar{z}z.$$

En esta ecuación aparentemente inocente, hemos encontrado la estructura adicional que requerimos. Observamos que, para $f \in C_0(X)$,

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \sup\{|f(p)|^2 \mid p \in X\} \\ &= \sup\{\overline{f(p)}f(p) \mid p \in X\} \\ &= \|\bar{f}f\| \end{aligned}$$

donde $\overline{f}(p) = \overline{f(p)}$ para todo $p \in X$.

Definición 4.3. Una *involución* en un álgebra de Banach es un mapa $A \to A$, $x \mapsto x^*$ con las siguientes propiedades. Para todo $x, y \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$, tenemos:

(1) $(x^*)^* = x$.
(2) $(x + y)^* = x^* + y^*$.
(3) $(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$.
(4) $(xy)^* = y^* x^*$.

Un *C^*-álgebra* es un álgebra de Banach con una involución tal que

$$\|x^* x\| = \|x\|^2$$

para todo $x \in A$, cuál se llama la *C^*-identidad*.

Ejemplo 4.4. $M_n(\mathbb{C})$ con la involución dada por la conjugada transpuesta $A^* = \overline{A^t}$ es un C^*-álgebra. A^* se llama la *adjunta de A*.

Ejemplo 4.5. Si H es un espacio de Hilbert (es decir un espacio de producto interno completo), entonces para cada operador lineal acotado $T : H \to H$, existe un mapa único $T^* : H \to H$ tal que $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle$ para todo $u, v \in H$. T^* se llama el *adjunto de T* y también es lineal y acotado. El mapa $T \to T^*$ es una involución en $B(H)$ para cual $B(H)$ es un C^*-álgebra.

Comentario 4.6. Se puede mostrar que no existen involuciones en los álgebras de Banach $l^1(\mathbb{Z})$ y $L^1(\mathbb{R})$ para cual son C^*-álgebras. Existen involuciones en ellos, pero ningún cumple la C^*-identidad. Por una discussión de $L^1(\mathbb{Z})$, sigue el siguiente link:
https://math.stackexchange.com/questions/95129/why-is-ell1-mathbbz-not-a-c-algebra
Si G es un grupo localmente compact abeliano, el álgebra $L^1(G)$ se puede completar respecto a *otra norma* para obtener un C^*-álgebra $C^*(G)$. Estos C^*-álgebras están relacionados con la teoría de la representacion de grupos [Dix77, Part II].

Definición 4.7. Sean A y B C^*-álgebras. Un homomorfismo de álgebras $\phi : A \to B$ tal que $\phi(x^*) = \phi(x)^*$ para todo $x \in A$ se llama un *$*$-homomorfismo*. Si adicionalmente ϕ es una biyección, ϕ se llama un *$*$-isomorfismo*. Si existe tal $*$-homomorfismo, decimos que A y B son *$*$-isomorfos (o isomorfos como C^*-álgebras)* y escribimos $A \cong B$.

Ejemplo 4.8. Si H es un espacio de Hilbert de dimensión $n \in \mathbb{N}$, entonces $B(H)$ y $M_n(\mathbb{C})$ son $*$-isomorfos.

Definición 4.9. Un elemento x de un C^*-álgebra se llama *autoadjunto* si $x^* = x$.

Problema 4.10. *Sea x un elemento autoadjunto de un C^*-álgebra A.*

(1) *Demuestra que cada elemento de A se puede expresar unicamente en la forma $x + iy$ donde $x, y \in A$ son autoadjuntos. Como en $\mathbb{C}$, x y y se llaman las partes real e imaginaria, respectivamente, del elemento.*
(2) *Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}.$$

(3) *Si A es unital, demuestra que $||x|| = r(x)$, donde $r(x)$ es el radio espectral de x [Definición 2.17]. Sugerencia: Usa la parte (a) con la fórmula del radio espectral [Problema 2.19].*

Comentario 4.11. Si x es cualquier elemento de un C^*-álgebra unital A, entonces x^*x es autoadjunto. Se sigue de Problema 4.10 (3) y la C^*-identidad que

$$||x||^2 = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{C}, x^*x - \lambda \text{ no es invertible}\}.$$

En esta manera, la norma de A está determinada completamente por la estructura algebraica de A. Si A es cualquier álgebra unital, existe no más de una norma para cuál A es un C^*-álgebra. También, si A y B son C^*-álgebra unitales y $\phi : A \to B$ es un $*$-homomorfismo, entonces

$$||\phi(x)||^2 = ||\phi(x)^*\phi(x)|| = ||\phi(x^*x)|| = r(\phi(x^*x)) \leq r(x^*x) = ||x^*x|| = ||x||^2.$$

Esto quiere decir que ϕ es acotado y $||\phi|| \leq 1$. Si ϕ es inyectivo, entonces $||\phi|| = 1$ y ϕ es una isometría. En particular, cualquier $*$-isoformismo es una isometría. Estas conclusiones se pueden extender a C^*-algebras no unitales usando, por ejemplo, [Problema 4.17].

Definición 4.12. Si A es un C^*-álgebra y B un subalgebra cerrada de A un C^*-algebra tal que $x* \in B$ cuando $x \in B$, entonces B se llama un *C^*-subalgebra de A*, y B es en sí mismo un C^*-álgebra.

Necesitaremos el siguiente resultado.

Teorema 4.13 (Stone-Weierstrass)**.** [Mor16, Chapter 12], [Sun98, Theorem A.6.9 (b)] *Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Si A es un C^*-subalgebra unital de $C(X)$ que separa los puntos de X, en el sentido de que $f(p) = f(q)$ para todo $f \in A$ solo cuando $p = q$, entonces $A = C(X)$.*

Antes de enfocarnos en C^*-algebras conmutativos, mencionamos un resultado importante que no vamos a perseguir más aquí.

Teorema 4.14 (Gelfand-Naimark-Segal)**.** *Cada C^*-álgebra es $*$-isomorfo (isométricamente) a un C^*-subalgebra de $B(H)$ para algún espacio de Hilbert H.*

Ahora llegamos al resultado que nos interesa.

Teorema 4.15 (Gelfand-Naimark)**.** *Cada C^*-álgebra es $*$-isomorfo (isométricamente) a $C_0(X)$ para algún espacio de Hausdorff localmente compacto X. En efecto, la transformación de Gelfand*

$$\Gamma : A \to C_0(\hat{A})$$

es un $*$-isomorfo (isométrico).

Vamos a demostrar Teorema 4.15 en el caso de que A es unital, y dejamos el caso no unital como el último problema. Primero, necesitamos algunos resultados preliminares.

Problema 4.16. *Sea A un álgebra de Banach unital y sea $x \in A$.*

(1) *Demuestra que podemos definir*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

y que $e^{x+y} = e^x e^y$ *para todo* $y \in A$ *tal que* $xy = yx$.

(2) *Ahora asume que A es un* C^**-álgebra y que x es autoadjunto. Para todo* $t \in \mathbb{R}$*, define*

$$u_t = e^{itx}.$$

Demuestra que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$u_t^* = u_{-t}.$$

(3) *Un elemento u de un* C^**-álgebra se llama unitario si* $u^* = u^{-1}$*. Demuestra que si u es unitario, entonces* $\|u\| = 1$*. Demuestra que* u_t *de la parte (b) es unitario para todo* $t \in \mathbb{R}$.

(4) *Sea* $\phi \in \hat{A}$*. Con x autoadjunto como en la parte (b), demuestra que* $\phi(x) \in \mathbb{R}$*. Sugerencia: Considera* $\phi(u_t)$ *y recuerda que* $\|\phi\| = 1$*. Se sigue que* $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración de Teorema 4.15 cuando A es unital. Ya demostramos que $\Gamma : A \to C(\hat{A})$ es un homomorfismo (contractivo) de álgebras de Banach. Queda por demostrar que Γ es una biyección y $\Gamma(x^*) = \Gamma(x)^*$ para todo $x \in \hat{A}$.

Sea x un elemento autoadjunto de A. Ya que $\hat{x}(\phi) = \phi(x)$ pertenece a $\sigma(x)$ [Proposición 2.24 (1)] y $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$ [Problema 4.16 (4)], tenemos que $\hat{x}$ es autoadjunto en $C(\hat{A})$. Cada elemento de A se puede expresar en la forma $x + iy$ donde x y y son autoadjuntos [Proposición 4.10 (1)], y verificamos que $\Gamma((x + iy)^*) = \Gamma(x + iy)^*$.

Sea x cualquier elemento de A. Entonces x^*x es autoadjunto y tenemos que $\|x^*x\| = r(x^*x)$ [Problema 4.10 (3)]. Al mismo tiempo tenemos $\|\Gamma(x^*x)\| = r(x^*x)$. Ahora por la C^*-identidad, tenemos

$$\begin{aligned} \|\Gamma(x)\|^2 &= \|\Gamma(x)^*\Gamma(x)\| \\ &= \|\Gamma(x^*x)\| \\ &= r(x^*x) \\ &= \|x^*x\| \\ &= \|x\|^2. \end{aligned}$$

Entonces Γ es una isometría (y en particular es inyectiva). Ahora solo falta demostrar que Γ es sobreyectiva. Esto es una consecuencia directa del teorema de Stone-Weierstrass [Teorema 4.13]. □

Problema 4.17. *Sea A un* C^**-álgebra, sea* $x \in A$*, y define*

$$L_x : A \to A$$

$$L_x(y) = xy.$$

(1) *Demuestra que L define un homomorfismo isométrico de álgebras de Banach de A a* $B(A)$*, el álgebra de Banach de operadores acotados en (el espacio de Banach) A.*

(2) *Define*

$$A^+ = \{L_x + \alpha \mid x \in A, \alpha \in \mathbb{C}\} \subseteq B(A),$$

donde α *significa multiplicación escalar por* α*, y*

$$(L_x + \alpha)^* = L_{x^*} + \overline{\alpha}.$$

Demuestra que A^+ es un C^*-álgebra unital. Se llama la unitización (de C^*-álgebra) de A. (La involución $(x, \alpha)^* = (x^*, \overline{\alpha})$ en la unitización de álgebra de Banach de A no necesariamente cumple la C^*-identidad).

(3) *Demuestra Teorema 4.15 en el caso de que A no es unital utilizando la unitización de A.*

Comentario 4.18. Teorema 4.15 estabelece que estudiar C^*-álgebras conmutativos es, en algún sentido, lo mismo que estudiar espacios de Hausdorff localmente compactos. En el idioma de la teoría de categorías, tenemos una *equivalencia categorias*. La idea de *topología no conmutativa* es estudiar C^*-álgebras de la perspectiva que son generalizaciones de espacios de Hausdorff localmente compactos, o, en otras palabras análogos no conmutativos de tales espacios.

Terminamos con una pregunta para estudio adicional.

Pregunta 4.19. *¿ Cómo se adapta la topología algebraica al estudio de espacios no conmutativos?*

Un buen lugar para empezar es [RLL00], y luego [Con94].

References

[Con94] Alain Connes. *Noncommutative geometry*. Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.

[Dix77] J. Dixmier. *C^*-algebras*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977. Translated from the French by Francis Jellett, North-Holland Mathematical Library, Vol. 15.

[Mor16] Sidney A. Morris. Topology without tears. www.topologywithouttears.net, 2016.

[RLL00] M. Rørdam, F. Larsen, and N. Laustsen. *An introduction to K-theory for C^*-algebras*, volume 49 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[Sun98] V.S. Sunder. Functional analysis: Spectral theory. Birkhauser, 1998.